

UMA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA PARA FIBRADOS DE
ESFERAS COM SECÇÕES

Nelio Baldin



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

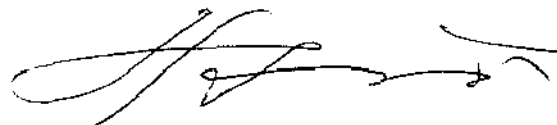
B193u

6550/BC

UMA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA PARA FIBRADOS DE
ESFERAS COM SECÇÕES

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Nelio Baldin e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 03 de Setembro de 1985.



Prof. Dr. Antonio Conde
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Setembro de 1985.

Este trabalho contou com auxílio financeiro de CAPES-PICD, de março de 1981 a julho de 1982.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRO

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Antonio Conde, pela proposição do tema de trabalho e pela orientação,

Ao Prof. Duane Randall, pela atenção e gentileza com que sempre nos recebeu e pelas valiosas sugestões,

A todos os colegas do DM-UFSCar e do IMECC-UNICAMP que sempre nos incentivaram e apoiaram,

À minha família pela compreensão e apoio,

os nossos profundos e sinceros agradecimentos.

Nelio Baldin

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I - O INVARIANTE DE HIRSCH - SMALE	1
§1. DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES BÁSICAS	1
§2. O INVARIANTE DE SMALE	4
§3. O TRABALHO DE HIRSCH	8
§4. APLICAÇÕES DA TEORIA DE HIRSCH	34
CAPÍTULO II - UMA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA PARA FIBRADOS DE ESFERAS	46
§1. UMA ESTRUTURA DE GRUPO PARA CLASSES DE HOMOTOPIA DE APLICA- ÇÕES DE ESPAÇOS TOTAIS DE FIBRADOS DE ESFERAS COM SECÇÕES.	46
§2. A CONSTRUÇÃO DE SMALE PARA FIBRADOS DE ESFERAS UTILIZANDO- SE O FIBRADO TANGENTE AO LONGO DAS FIBRAS	53
§3. NOVA CONSTRUÇÃO DO INVARIANTE UTILIZANDO-SE O FIBRADO TANGENTE GLOBAL	63
§4. IMERSÕES DE $S(\xi)$ EM \mathbb{R}^n COM $TS(\xi) _{S(M)}$ TRIVIAL	76
BIBLIOGRAFIA	84

INTRODUÇÃO

Um dos primeiros resultados sobre classificações de imersões de variedades obtido foi o teorema de Whitney - Graustein [Wh], em 1937, que classifica as imersões do círculo S^1 no plano euclidiano \mathbb{R}^2 a menos de homotopia regular, ou seja, a menos de deformações contínuas no espaços das imersões.

Em sua tese [S1], de 1958, Smale generalizou o resultado acima para o caso de imersões de S^1 em uma variedade qualquer. Em [S2] e [S3], de 1958 e 1959, ele aprofundou seu trabalho classificando as imersões da esfera S^k no espaço euclidiano \mathbb{R}^n ($n > k$), a menos de homotopia regular.

Para isto, Smale associou a cada par de imersões f e g de S^k em \mathbb{R}^n , com ponto base, um elemento $\Omega(f,g)$ do k -ésimo grupo de homotopia $\pi_k V_k(\mathbb{R}^n)$ da variedade de Stiefel dos k -referenciais de \mathbb{R}^n , obtendo, basicamente, o seguinte resultado.

Teorema (Smale): Duas imersões f e g de S^k em \mathbb{R}^n ($n > k$) são regularmente homotópicas se e somente se o invariante $\Omega(f,g)$ é nulo. Além disso, dados uma imersão $g: S^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um elemento $\Omega \in \pi_k V_k(\mathbb{R}^n)$, existe uma imersão $f: S^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\Omega(f,g) = \Omega$.

O invariante de Smale $\Omega(f,g)$ é obtido geometricamente pela seguinte construção. Por meio de uma homotopia regular, fazemos f coincidir com g no hemisfério inferior S_-^k da esfera S^k , e consideramos um campo v de k -referenciais tangentes definido no hemisfério superior S_+^k . Um representante de $\Omega(f,g) \in \pi_k V_k(\mathbb{R}^n)$ é a aplicação

$w: S^k \rightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$ dada por:

$$w(z) = \begin{cases} f_*(z) \cdot v(z) & , \text{ se } z \in S_+^k \\ g_*(rz) \cdot v(rz) & , \text{ se } z \in S_-^k \end{cases}$$

onde r é a reflexão equatorial de S^k e f_* e g_* são as derivadas de f e g , respectivamente.

Em sua tese [H], de 1959, Hirsch conseguiu resultados extremamente profundos sobre existência e classificação de imersões, baseando-se no trabalho de Smale e na teoria de obstrução.

Um de seus resultados estabelece o seguinte.

Teorema (Hirsch): As classes de homotopia regular de imersões da variedade M^k na variedade N^n estão em correspondência biunívoca com as classes de homotopia equivariante das aplicações equivariantes entre os espaços totais $T_k(M)$ e $T_k(N)$ dos fibrados de k -referenciais tangentes de M e N , respectivamente, desde que $n > k$.

Em 1968, Becker [B], utilizando um teorema de Hirsch-Haefliger [H-H], conseguiu mostrar que o conjunto das classes de homotopia regular de imersões de uma variedade fechada M^k em \mathbb{R}^n admite uma estrutura de grupo, desde que uma imersão $g: M^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja fixada como ponto base e que estejamos no domínio estável ($2n > 3k+1$). Esse grupo foi calculado, sob certas condições, em 1972, num trabalho de Larmore-Thomas [L-T].

Observemos que nos trabalhos acima citados, exceto nos de Smale, os teoremas obtidos são gerais, não levando em consideração a particular estrutura de cada variedade. Surge então a questão: se

especializarmos as nossas variedades, quais resultados obtemos?

Dentro dessa filosofia, nos foi sugerido obter uma construção semelhante à do invariante de Smale com espaços totais de fibrados de esferas ao invés de esferas, utilizando o fibrado tangente ao longo das fibras. Poríamos em jogo então a estrutura intrínseca do fibrado de esferas, ficando próximo das idéias desenvolvidas por Smale. Como a consideração do fibrado tangente apenas ao longo das fibras trouxe dificuldades maiores, resolvemos estudar uma situação mais clássica, trocando-o pelo fibrado tangente global do fibrado de esferas. Com isto, obtivemos uma generalização do teorema de Smale, sob certas condições.

Observamos também que, se um fibrado vetorial ζ admitir duas secções independentes e se o fibrado tangente do fibrado de esferas associado $S(\zeta)$ trivializar quando restrito a uma das secções, podemos associar ao conjunto das classes de homotopia regular das imersões de $S(\zeta)$ em \mathbb{R}^n , com uma imersão fixada como ponto base, uma estrutura de grupo, na linha de Becker [B].

As hipóteses acima são verificadas por exemplo quando ζ é a soma de Whitney $\nu^{k-1} \oplus 1 \oplus 1$, onde 1 representa o fibrado trivial de posto 1 sobre uma variedade M^m e $\nu^{k-1} \oplus 1$ é o fibrado normal de uma imersão de M^m em \mathbb{R}^{m+k} que admita secção normal.

No primeiro capítulo de nosso trabalho, apresentamos uma exposição sucinta do trabalho de Hirsch e de Smale em seus aspectos importantes ao nosso estudo.

No segundo capítulo, apresentamos uma estrutura de grupo para

classes de homotopia de aplicações definidas em $S(\zeta)$, desde que este apresente duas secções ortogonais, e estudamos a construção de Smale utilizando o fibrado tangente ao longo das fibras e o tangente global de $S(\zeta)$.

Queremos ainda observar que, após os trabalhos básicos de Smale [S1], [S2] e [S3] e Hirsch [H], que são de natureza geométrica, a atenção geral ficou voltada para a utilização de métodos algébricos via classes características, para a análise do problema de se equacionar a dimensão geométrica do fibrado normal estável de uma variedade, que fornece a dimensão mínima de imersão de tal variedade num espaço euclidiano. Tal atitude, embora bastante explorada, não conseguiu ainda resolver completamente o problema.

Pretendemos, com o presente trabalho, apresentar uma tentativa de construção geométrica que, embora inspirada na de Smale, como no caso de Hirsch, representa uma ramificação não explorada e, a nosso ver, significativa.

A pesquisa aqui desenvolvida não se fecha com este trabalho. Um dos aspectos que abordaremos em seguida é do cálculo e melhor conhecimento da estrutura de grupo aqui introduzida nas classes de homotopia regular de imersões de $S(\zeta)$ em \mathbb{R}^n . Como observamos acima, pretendemos ainda analisar o desenvolvimento destas idéias levando-se em conta o fibrado tangente ao longo das fibras de $S(\zeta)$. Por sugestão de R. Lashof, poder-se-ia considerar, neste caso, não imersões de $S(\zeta)$ em \mathbb{R}^n , mas uma situação mais geral obtida tomando-se funções contínuas f de $S(\zeta)$ em \mathbb{R}^n que são imersões apenas quando

restritas às fibras de $S(\zeta)$.

Uma pergunta, que deverá ser abordada após um melhor conheci
mento dos aspectos acima levantados, é a seguinte: o que se passa
quando o fibrado ζ , considerado neste trabalho, é o fibrado nor
mal de um mergulho de uma variedade M^n em \mathbb{R}^n , o qual induz um
mergulho de $S(\zeta)$ em \mathbb{R}^n , via vizinhança tubular, que se fixa como
ponto base?

é contínua. Se f for regularmente homotópica a g relativo a A , indicaremos tal fato por $f \approx_{\text{rel } A} g$. Se $A = \emptyset$, omitiremos o termo rel A .

1.1.1. DEFINIÇÃO DE FIBRADO NORMAL DE UMA IMERSÃO

Dada uma imersão $f: M^m \rightarrow N^n$, sua derivada f_* induz uma aplicação de TM no fibrado induzido de TN por f . O conúcleo de tal aplicação é denominado fibrado normal da imersão f e vamos denotá-lo por $v(f)$.

Em termos de diagrama, temos

$$\begin{array}{ccccc} TM & \xrightarrow{\hat{f}_*} & f^! TN & \xrightarrow{q} & v(f) = \frac{f^! TN}{\hat{f}_*(TM)} \\ & \searrow & \swarrow f & & \\ & M & \xrightarrow{\quad} & N & \end{array}$$

onde $f^! TN$ denota o fibrado induzido de TN por f , \hat{f}_* é a aplicação induzida por f_* e q é a aplicação quociente.

Se colocarmos uma métrica em $f^! TN$, podemos identificar, a menos de isomorfismo, o complemento ortogonal da imagem de \hat{f}_* com $v(f)$ e, como \hat{f}_* é injetora, essa imagem $\hat{f}_*(TM)$ pode ser identificada com TM . Podemos assim escrever a menos de isomorfismo, a equação

$$TM \oplus v(f) = f^! TN,$$

onde \oplus indica a soma de Whitney.

CAPÍTULO I

O INVARIANTE DE HIRSCH - SMALE

§1. DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES BÁSICAS

Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis de dimensões m e n , respectivamente, com $n > m$. O termo diferenciável, em tudo o que se gue, significará classe C^∞ .

Uma imersão $f: M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável cuja derivada f_* tem posto m em cada ponto de M .

Se duas imersões f e g e suas derivadas coincidirem num subconjunto $A \subset M$, dizemos que f e g são tangentes em A e denotaremos tal fato por $(f, f_*)|_A = (g, g_*)|_A$.

Seja TM o fibrado tangente de M . A restrição de TM a A será denotada por $TM|_A$. Se $p \in M$, $(TM)_p$ representará a fibra sobre p .

O fibrado dos k -referenciais tangentes à M será denotado por $T_k M$ e indicaremos também por $f_*: T_k M \rightarrow T_k N$ a aplicação induzida pela derivada da imersão f .

Observemos que $T_k \mathbb{R}^n$ pode ser identificado com o produto $\mathbb{R}^n \times V_k(\mathbb{R}^n)$ do espaço euclidiano \mathbb{R}^n pela variedade de Stiefel $V_k(\mathbb{R}^n)$ dos k -referenciais de \mathbb{R}^n .

Uma homotopia regular relativa a A entre duas imersões f e g de M em N é uma homotopia H_t entre f e g que em cada estágio é uma imersão e tal que a homotopia induzida H_{t*} no fibrado tangente

Quando $N = \mathbb{R}^n$, $T\mathbb{R}^n$ é o fibrado trivial de posto n , representado por n , e temos

$$TM \oplus v(f) = n.$$

Veremos, do trabalho de Hirsch, que um fibrado v que satisfaça a equação acima, é o fibrado normal de uma imersão $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Seja M^m uma variedade compacta. Uma imersão $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ induz uma aplicação \bar{f} de M na grassmanniana $G_m(\mathbb{R}^n)$ dos m -planos de \mathbb{R}^n , associando a cada ponto $z \in M$ a imagem, via f_* , do espaço tangente $(TM)_z$. Essa aplicação $\bar{f}: M \rightarrow G_m(\mathbb{R}^n)$ será denominada aplicação tangente.

Se M for orientada, podemos considerar a grassmanniana $\tilde{G}_m(\mathbb{R}^n)$ dos m -planos orientados de \mathbb{R}^n , na definição acima.

Temos então as aplicações fibradas

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\quad} & \tilde{\gamma}_n^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\quad \bar{f} \quad} & \tilde{G}_m(\mathbb{R}^n) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} v(f) & \xrightarrow{\quad} & \tilde{\gamma}^{\perp} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\quad \bar{f} \quad} & \tilde{G}_m(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

onde $\tilde{\gamma}_n^m$ é o fibrado canônico sobre $\tilde{G}_m(\mathbb{R}^n)$ e $\tilde{\gamma}^{\perp}$ é o seu complemento ortogonal.

1.1.2. DEFINIÇÃO: Denominamos classe normal da imersão $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ a classe de Euler $e(v(f)) \in H^{n-m}(M^n; \mathbb{Z})$ do fibrado normal $v(f)$.

Temos $e(v(f)) = \bar{f}^*(e(\tilde{\gamma}^{\perp}))$, onde \bar{f}^* é a aplicação induzida por \bar{f} em cohomologia.

Observemos que as classes características associadas ao fibra do tangente de M não distinguem aplicações tangentes de imersões, ao contrário da classe normal.

§2. O INVARIANTE DE SMALE

Para classificar as classes de homotopia regular de imersões da esfera S^k em \mathbb{R}^n , com $n > k$, Smale [S3] utilizou a construção geométrica apresentada a seguir.

Seja p um ponto de S^k e sejam $z_0 \in (T_k S^k)_p$ um k-referencial tangente a S^k em p e (y_0, v_0) um elemento do produto. $\mathbb{R}^n \times V_k(\mathbb{R}^n)$.

1.2.1. DEFINIÇÃO: Uma imersão $f: S^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ é denominada uma imersão com ponto base se $f_*(z_0) = (y_0, v_0)$, e uma homotopia regular é denominada homotopia regular com ponto base se em cada estágio for uma imersão com ponto base.

Dadas duas imersões com ponto base $f, g: S^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, podemos deformar g por meio de uma homotopia regular com ponto base, de modo a coincidir com f numa vizinhança de p difeomorfa a um disco fechado D^k .

Desse modo, podemos considerar f e g tangentes no hemisfério inferior S_-^k da esfera com p como polo sul.

Uma vez que o fibrado tangente de S^k restrito ao hemisfério

superior S_+^k é trivial, podemos fixar uma secção v em $(T_k S^k)|_{S_+^k}$.

Como as derivadas f_* e g_* coincidem no equador de S^k , está bem definida a aplicação w de S^k em $V_k(\mathbb{R}^n)$ dada por:

$$w(x) = \begin{cases} f_*(x) \cdot v(x) & , \text{ se } x \in S_+^k, \\ g_*(rx) \cdot v(rx) & , \text{ se } x \in S_-^k, \end{cases}$$

onde $r: S^k \rightarrow S^k$ é a reflexão equatorial.

Aqui estamos identificando o fibrado dos k -referenciais tangentes de \mathbb{R}^n com a variedade de Stiefel $V_k(\mathbb{R}^n)$.

1.2.2. DEFINIÇÃO: A classe de homotopia da aplicação w é o invariante de Smale $\Omega(f,g) \in \pi_k V_k(\mathbb{R}^n)$.

Smale obteve o seguinte resultado ([S3]):

1.2.3. TEOREMA: Se f e g são imersões com ponto base de S^k em \mathbb{R}^n , com $n > k$, então elas são regularmente homotópicas com ponto base se e somente se $\Omega(f,g) = 0$. Além disso, dados um elemento $\Omega_0 \in \pi_k V_k(\mathbb{R}^n)$ e uma imersão $f: S^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ com ponto base, existe uma imersão com ponto base $g: S^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\Omega(f,g) = \Omega_0$.

Este teorema estabelece uma bijecção entre as classes de homotopia regular com ponto base de imersões de S^k em \mathbb{R}^n e os elementos do grupo de homotopia $\pi_k V_k(\mathbb{R}^n)$.

Se $n > k+1$, as palavras ponto base podem ser omitidas do enunciado do teorema acima.

Smale mostrou também que, se f se estender ao disco D^k e $\Omega(f,g) = 0$, então g também se estende.

Como $\pi_k V_k(\mathbb{R}^{2k})$ é igual a \mathbb{Z} se k for par ou 1, e a \mathbb{Z}_2 se k for ímpar maior que 2, existem infinitas classes de homotopia regular de imersões de S^k em \mathbb{R}^{2k} , se k for par ou 1, e apenas duas se k for ímpar maior que 2.

Se $n \geq 2k+1$, duas quaisquer imersões de S^k em \mathbb{R}^n são regularmente homotópicas, pois neste caso $\pi_k V_k(\mathbb{R}^n) = 0$.

Um resultado surpreendente é que duas quaisquer imersões com ponto base de S^2 em \mathbb{R}^3 são regularmente homotópicas, pois $V_2(\mathbb{R}^3) = SO(3)$ e portanto $\pi_2 V_2(\mathbb{R}^3) = 0$.

Vamos agora caracterizar as imersões de S^{2k} em \mathbb{R}^{4k} através de suas classes normais, que pertencem a $H^{2k}(S^{2k}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

1.2.4. TEOREMA: Sejam f e g duas imersões de S^{2k} em \mathbb{R}^{4k} . Então f é regularmente homotópica a g se e somente se $e(v(f)) = e(v(g))$.

Demonstração: Seja $p: V_{2k}(\mathbb{R}^{4k}) \rightarrow \tilde{G}_{2k}(\mathbb{R}^{4k})$ a projeção que associa a cada referencial o plano por ele gerado.

As imersões f e $g: S^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{4k}$ induzem as aplicações tangentes \tilde{f} e $\tilde{g}: S^{2k} \rightarrow \tilde{G}_{2k}(\mathbb{R}^{4k})$, respectivamente.

Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_{2k} S^{2k} & \xrightarrow{\bar{f}_\# , \bar{g}_\#} & \pi_{2k} \tilde{G}_{2k}(\mathbb{R}^{4k}) & \xleftarrow{p_\#} & \pi_{2k} V_{2k}(\mathbb{R}^{4k}) \\
 \downarrow h_0 & & \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 \\
 H_{2k}(S^{2k}) & \xrightarrow{\bar{f}_* , \bar{g}_*} & H_{2k}(\tilde{G}(\mathbb{R}^{4k})) & \xleftarrow{p_*} & H_{2k}(V_{2k}(\mathbb{R}^{4k})) ,
 \end{array}$$

onde as verticais são aplicações de Hurewicz e as demais são induzidas de f, g , e p em homotopia e homologia.

Se $e(v(f)) = e(v(g))$, temos $\bar{f}_* = \bar{g}_*$, por [L-S].

Seja S um gerador de $\pi_k S^k$. Por construção, temos

$$p_\# \Omega(f, g) = \bar{f}_\#(S) - \bar{g}_\#(S),$$

e pelo diagrama acima,

$$p_* h_2(\Omega(f, g)) = h_1 p_\#(\Omega(f, g)) = \bar{f}_*(h_0(S)) - \bar{g}_*(h_0(S)) = 0.$$

Como p_* é bijetor, por [L-S], temos $h_2(\Omega(f, g)) = 0$. Uma vez que h_2 é isomorfismo, concluímos que $\Omega(f, g) = 0$ e pelo teorema de Smale 1.1.2., $f \approx_r g$.

A recíproca é trivial.

Um dos resultados de Hirsch é exatamente a generalização do teorema acima para variedades compactas orientadas de dimensão par.

§3. O TRABALHO DE HIRSCH

Apresentamos aqui a parte da obra de Hirsch relevante para nosso estudo.

Hirsch [H] construiu uma "teoria de obstrução" utilizando o invariante de Smale ligeiramente generalizado e definindo um novo invariante τ cuja nulidade garante que uma imersão $f: S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ com campo de vetores normais f^\perp pode ser estendida a D^k com derivada na direção normal ao bordo de D^k igual a f^\perp .

Nesta teoria, imersões são construídas esqueleto a esqueleto, o que apresenta a primeira dificuldade, pois um esqueleto não é uma variedade. Outra dificuldade é que os invariantes estão definidos para bordos de discos, enquanto que variedades trianguladas são compostas por simplexes.

Para transpor essas dificuldades, Hirsch introduziu o conceito de M-imersão de um conjunto A contido numa variedade M .

M - IMERSÕES

Sejam M e N variedades e $A \subset M$ um subconjunto.

Consideremos $f: A \rightarrow N$ e $f': TM|_A \rightarrow TN$ aplicações contínuas tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} TM|_A & \xrightarrow{f'} & TN \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & N \end{array} .$$

1.3.1. DEFINIÇÃO: O par (f, f') é uma M-imersão de A em N se existir um aberto U em M com $A \subset U$ e uma imersão $g: U \rightarrow N$ tal que $g_*| (TM|A) = f'$.

Observemos que necessariamente $g|A = f$, ou seja, g estende f, e f é completamente determinada por f' .

Uma imersão g com a propriedade acima é denominada extensão admissível da M-imersão (f, f') .

Usaremos a notação $(f, f'): A \rightarrow N$ para denotar uma M-imersão de A em N.

Consideremos o espaço das aplicações contínuas de $TM|A$ em TN com a topologia compacto-aberta. A inclusão $(f, f') \rightarrow f'$ induz uma estrutura de espaço topológico no conjunto das M-imersões de A em N.

Podemos agora definir M-homotopia regular entre M-imersões.

Sejam (f, f') e (g, g') duas M-imersões de A em N tangentes num subconjunto $B \subset A$, possivelmente vazio. Ou seja, $f|B = g|B$ e $f'| (TM|B) = g'| (TM|B)$. Como em 1.1, denotamos tal fato por $(f, f')|B = (g, g')|B$.

1.3.2. DEFINIÇÃO: Uma M-homotopia regular relativa a B entre as M-imersões (f, f') e (g, g') é um caminho contínuo (h_t, h'_t) no espaço das M-imersões ligando (f, f') à (g, g') e tal que $(h_t, h'_t)|B = (f, f')|B$.

Especializaremos agora nossa apresentação para discos e esferas.

\mathbb{R}^q - IMERSÕES DE D^k E S^{k-1} EM \mathbb{R}^n

Sejam D^k o k -disco unitário centrado na origem em \mathbb{R}^k , S^{k-1} seu bordo e B^k uma k -bola aberta contendo D^k . Em tudo o que segue, entendemos imersões de D^k em \mathbb{R}^n como restrições de imersões de B^k , e campos transversais a imersões de D^k como restrições de campos transversais a imersões de B^k , ou seja, campos de vetores não tangentes a imersões de B^k .

Denotaremos por $\mathcal{J}(k,n;q)$ o espaço das \mathbb{R}^q - imersões de D^k em \mathbb{R}^n e por $\mathcal{J}'(k,n;q)$ o espaço das \mathbb{R}^q - imersões de S^{k-1} em \mathbb{R}^n , com as topologias determinadas acima.

Relacionaremos \mathbb{R}^q - imersões com campos transversais.

Consideremos o conjunto dos pares (g,ψ) , onde $g: D^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão e ψ é um r -campo de vetores transversais a g . Podemos dotar este conjunto de uma topologia induzida do espaço produto do espaço das imersões de D^k em \mathbb{R}^n (com a topologia C^1) pelo espaço das aplicações de D^k em $T_r \mathbb{R}^n$ (com a topologia compacto-aberta).

1.3.3. TEOREMA: Existe um homeomorfismo entre o espaço

$\mathcal{J}(k,n; k+r)$ das \mathbb{R}^{k+r} - imersões de D^k em \mathbb{R}^n e o espaço dos pares (g,ψ) , onde g é uma imersão de D^k em \mathbb{R}^n e ψ é um r -campo transversal a g .

Seja e_i a i -ésima secção canônica de $T\mathbb{R}^{k+r}$. O homeomorfismo é dado por $(f,f') \rightarrow (f,\psi)$, com ψ definido por

$$\psi(x) = (f'(e_{k+1}(x)), \dots, f'(e_{k+r}(x))), \quad \forall x \in D^k.$$

Demonstração: Vamos exibir a inversa da aplicação enunciada.

Para cada par (f, ψ) , definimos $f': \text{TIR}^{k+r}|D^k \rightarrow \text{TIR}^n$ como segue.

Decompomos $\text{TIR}^{k+r}|D^k$ como a soma $TD^k \oplus (TD^k)^\perp$, com $(TD^k)^\perp$ gerado por e_{k+1}, \dots, e_{k+r} , e fazemos

$$f'(X) = f_*(X) \text{ , se } X \in TD^k$$

$$\text{e } f'(e_{k+i}(x)) = \psi_i(x) \text{ , } i = 1, \dots, r.$$

Resta mostrar que f se estende a uma imersão conveniente de um aberto de \mathbb{R}^{k+r} .

Seja U uma vizinhança tubular de B^k em \mathbb{R}^{k+r} e seja $\theta: U \rightarrow \text{TIR}^{k+r}|B^k$ a identificação de U com a vizinhança da secção nula do fibrado normal de TB^k em $\text{TIR}^{k+r}|B^k$.

Definimos $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ como a composta

$$U \xrightarrow{\theta} \text{TIR}^{k+r}|B^k \xrightarrow{f'} \text{TIR}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ ,}$$

onde a última aplicação é a projecção usual.

Temos $g_*(\text{TIR}^{k+r}|D^k) = f'$ e, por continuidade, g_* apresenta posto máximo numa vizinhança de D^k . Ainda $g|D^k = f$.

Isto mostra que (f, f') é uma \mathbb{R}^{k+r} - imersão de D^k em \mathbb{R}^n .

A continuidade das aplicações envolvidas decorre das definições das topologias.

Um resultado análogo vale para S^{k-1} .

1.3.4. TEOREMA: Existe um homeomorfismo entre o espaço $\mathcal{J}''(k,n;k+r)$ das \mathbb{R}^{k+r} - imersões $(f,f'): S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e o espaço dos pares (g,ψ) , onde g é uma imersão de S^{k-1} em \mathbb{R}^n e ψ é um $(r+1)$ -campo transversal a g . O homeomorfismo é explicitado por $(f,f') \rightarrow (f,\psi)$, com ψ definido por

$$\psi(x) = \{x, f'(e_{k+1}(x)), \dots, f'(e_{k+r}(x))\},$$

onde x representa indistintamente um ponto da esfera S^{k-1} e o vetor normal unitário por ele determinado.

Demonstração: vide [H]

O TEOREMA DA EQUIVALÊNCIA FRACA DE HOMOTOPIA

1.3.5. DEFINIÇÃO: Dizemos que uma aplicação contínua entre dois espaços topológicos é uma equivalência fraca de homotopia se induzir isomorfismo entre os grupos de homotopia, em todos os níveis.

Seja $p_q: \mathcal{J}(k,n;q) \rightarrow \mathcal{J}'(k,n;q)$ definida por $p_q(f,f') = (f|_{S^{k-1}}, f'|_{(T\mathbb{R}^q|_{S^{k-1}})})$.

1.3.6. LEMA: Se $k < n$, p_q tem a propriedade do levantamento de homotopia para poliedros.

Demonstração: vide [H].

Dado $(f,f') \in \mathcal{J}(k,n;q)$, seja $r_q(f,f')$ o subespaço das \mathbb{R}^q -

immersões de D^k em \mathbb{R}^n que são tangentes a (f, f') no bordo S^{k-1} , ou seja,

$$\Gamma_q(f, f') = \{(h, h') \in \mathcal{J}(k, n; q) : p_q(h, h') = p_q(f, f')\}.$$

Seja também $\Gamma'_q(f, f')$ o espaço definido por

$$\Gamma'_q(f, f') = \{g: D^k \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n) \mid g(x) = (f'(e_1(x)), \dots, f'(e_q(x))), \forall x \in S^{k-1}\}$$

com a topologia compacto-aberta. Aqui e_i é a i -ésima secção canônica de $T\mathbb{R}^q$.

Esses dois espaços são relacionados através de uma aplicação

$$\phi_q: \Gamma_q(f, f') \rightarrow \Gamma'_q(f, f') \quad \text{definida por}$$

$$\begin{aligned} \phi_q(h, h'): D^k &\rightarrow V_q(\mathbb{R}^n) \\ x &\mapsto (h'(e_1(x)), \dots, h'(e_q(x))). \end{aligned}$$

O seguinte teorema desempenha um papel importantíssimo na teoria da Hirsch, permitindo-nos definir os invariantes.

1.3.7. TEOREMA: Para $k < n$ e $(f, f') \in \mathcal{J}(k, n; q)$, a aplicação $\phi_q: \Gamma_q(f, f') \rightarrow \Gamma'_q(f, f')$ é equivalência fraca de homotopia.

Demonstração: vide [H]

OS INVARIANTES

Vamos agora definir o invariante de Smale-Hirsch.

Sejam (f, f') e (g, g') \mathbb{R}^q - imersões de D^k em \mathbb{R}^n tangentes em S^{k-1} , ou seja, $(f, f'), (g, g') \in \mathcal{J}(k, n; q)$ com $p_q(f, f') = p_q(g, g')$.

Então $\phi_q(f, f')$ e $\phi_q(g, g')$ são aplicações de D^k em $V_q(\mathbb{R}^n)$ coincidentes em S^{k-1} .

Seja $d(\phi_q(f, f'), \phi_q(g, g')) \in \pi_k V_q(\mathbb{R}^n)$ a obstrução à existência de homotopia (rel S^{k-1}) entre $\phi_q(f, f')$ e $\phi_q(g, g')$.

1.3.8. DEFINIÇÃO: O invariante de Smale-Hirsch é a classe

$\Omega(f', g') = d(\phi_q(f, f'), \phi_q(g, g')) \in \pi_k V_q(\mathbb{R}^n)$, e é denominado a obstrução a uma \mathbb{R}^q - homotopia regular entre as \mathbb{R}^q - imersões (f, f') e (g, g') de D^k em \mathbb{R}^n .

Observemos que $\phi_q(f, f')$ e $\phi_q(g, g')$ são obtidos aplicando - se f' e g' ao campo de q -referenciais canônico (e_1, \dots, e_q) de $T_q \mathbb{R}^n$ e coincidem no bordo S^{k-1} .

Uma explicitação do invariante de Smale-Hirsch é então a seguinte.

Identificamos os hemisférios superior S_+^k e inferior S_-^k de S^k com D^k e definimos $w: S^k \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n)$ por

$$w(x) = \begin{cases} (f'(e_1(x)), \dots, f'(e_q(x))) & \text{se } x \in S_+^k, \\ (g'(e_1(x)), \dots, g'(e_q(x))) & \text{se } x \in S_-^k. \end{cases}$$

O invariante $\Omega(f', g')$ é a classe de homotopia de w .

Suas propriedades são dadas pelo seguinte teorema .

1.3.9. TEOREMA: Se $k < n$,

a) $\Omega(f', g') = 0$ se e somente se existe uma \mathbb{R}^q - homotopia regular (rel S^{k-1}) entre (f, f') e (g, g') ;

b) dados $(f, f') \in \mathcal{J}(k, n; q)$ e $\alpha \in \pi_q V_q(\mathbb{R}^n)$, existe $(g, g') \in \Gamma_q(f, f')$ tal que $\Omega(f', g') = \alpha$;

c) se $(g, g'), (h, h') \in \Gamma_q(f, f')$, então

$$\Omega(f', g') + \Omega(g', h') = \Omega(f', h');$$

d) $\Omega(f', f') = 0$;

e) se $\Omega(f', g') = 0$ e se $H: D^k \times I \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n)$ é uma homotopia (rel S^{k-1}) entre $\phi_q(f, f')$ e $\phi_q(g, g')$, existe uma \mathbb{R}^q - homotopia regular (h_t, h'_t) (rel S^{k-1}) entre (f, f') e (g, g') tal que a aplicação $D^k \times I \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n)$ dada por $(x, t) \rightarrow \phi_q(h_t, h'_t)(x)$ é homotópica a H (rel $D^k \times \partial I \cup S^{k-1} \times I$).

Demonstração: Segue do teorema 1.3.7 e das propriedades usuais de obstrução. A referência para essas propriedades é [St].

Definiremos agora o invariante de Hirsch, cujo anulamento permitirá estender \mathbb{R}^q - imersões de S^{k-1} a D^k .

Seja $(f, f'): S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma \mathbb{R}^q - imersão.

1.3.10. DEFINIÇÃO: O invariante de Hirsch é a classe de homotopia da aplicação $S^{k-1} \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n)$ dada por $x \mapsto (f'(e_1(x)), \dots, f'(e_q(x)))$, que será denotada por $\tau(f') \in \pi_{k-1} V_q(\mathbb{R}^n)$.

1.3.11. TEOREMA: Se $k < n$ e $\tau(f') = 0$, então (f, f') se estende a uma \mathbb{R}^q -imersão (g, g') de D^k em \mathbb{R}^n .

Idéia da demonstração: Observemos que $(f, f') \in \mathcal{J}'(k, n; q)$ é estendível a D^k se existir $(g, g') \in \mathcal{J}(k, n; q)$ tal que

$$p_q(g, g') = (f, f').$$

Como $p_q: \mathcal{J}(k, n; q) \rightarrow \mathcal{J}'(k, n; q)$ tem a propriedade do levantamento de homotopia (lema 1.3.6), se existir uma \mathbb{R}^q -homotopia regular entre (f, f') e (h, h') em $\mathcal{J}'(k, n; q)$ então (f, f') admite extensão a D^k se e somente se (h, h') o admitir.

Com isto, a demonstração é feita construindo-se uma \mathbb{R}^q -imersão de S^{k-1} em \mathbb{R}^n que se estende a D^k e é regularmente \mathbb{R}^q -homotópica a (f, f') .

Uma motivação para o próximo lema é sugerido pela seguinte situação, encontrada na definição do invariante de Smale 1.2.2.

Sejam f e g duas imersões de M em \mathbb{R}^n tangentes num ponto p de M . Desejamos deformar g por uma homotopia regular de modo a torná-la coincidente com f numa vizinhança de p em M .

Denotaremos por $\text{Im}(M, \mathbb{R}^n)$ o espaço das imersões de M em \mathbb{R}^n com a topologia C^1 .

1.3.12. LEMA: Seja L um subcomplexo finito mergulhado em M . Seja W uma vizinhança de L em M e sejam C um espaço compacto e F e G aplicações de C em $\text{Im}(M, \mathbb{R}^n)$.

Suponhamos que, para cada $c \in C$, $(F(c), F(c)_*)|_L = (G(c), G(c)_*)|_L$.

Então existem um aberto V de M com $L \subset V \subset \bar{V} \subset W$ e uma homotopia H_t de C no espaço $\text{Im}(M, \mathbb{R}^n)$ satisfazendo a:

- 1) $H_0 = G$; e para todo $c \in C$, temos
- 2) $(H_t(c), H_t(c)_*)|_{M-W} = (G(c), G(c)_*)|_{M-W}$;
- 3) $(H_1(c), H_1(c)_*)|_V = (F(c), F(c)_*)|_V$;
- 4) $H_t(c)$ tem a mesma classe de diferenciabilidade que $G(c)$ e $F(c)$, e
- 5) $(H_t(c), H_t(c)_*)|_x = (G(c), G(c)_*)|_x$ se $(G(c), G(c)_*)|_x = (F(c), F(c)_*)|_x$, onde $x \in M$.

A demonstração desse lema é essencialmente construtiva e é feita deformando-se $G(c)$ sobre os sucessivos esqueletos de L . Encontra-se em [H] (lema 2.5) e não a apresentaremos aqui.

1.3.13. COROLÁRIO: Sejam M uma variedade e $K \subset M$ uma subvariedade e suponhamos que M possua uma estrutura celular de modo que K seja um subcomplexo finito. Seja W uma vizinhança de K em M .

Sejam f e g duas imersões de M em \mathbb{R}^n tangentes em K .

Então existem um aberto V contendo K e uma imersão g_1 tais

que g_1 é regularmente homotópica a $g(\text{rel } K \cup (M-W))$ e

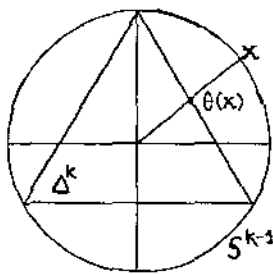
$$(g_1, g_{1*})|V = (f, f_*)|V.$$

Demonstração: Basta aplicar o lema 1.3.11. com $L = K$, C igual a um ponto $\{p\}$ e $F(p) = f$ e $G(p) = c$.

IMERSÕES DE SIMPLEXOS

Estenderemos as definições de τ e Ω para \mathbb{R}^q - imersões de simplexos.

Representaremos por Δ^k um k -simplexo fixado em \mathbb{R}^k com bari-centro na origem e bordo $\partial\Delta^k$. Seja S^{k-1} a esfera que o circunscreve.



Seja $\theta: S^{k-1} \rightarrow \partial\Delta^k$ a projeção radial obtida associando-se a cada $x \in S^{k-1}$ o ponto $\theta(x)$ em tersecção de $\partial\Delta^k$ com a semi-reta que liga x à origem.

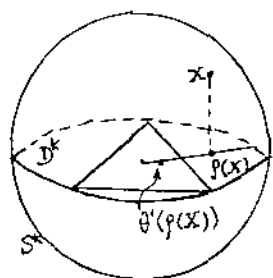
Fixada uma orientação em S^{k-1} , orientamos $\partial\Delta^k$ de modo a θ preservar a orientação.

Seja $(f, f'): \partial\Delta^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma \mathbb{R}^q - imersão e, como usualmente, seja (e_1, \dots, e_q) o campo dos q -referenciais canônicos de $T_q \mathbb{R}^q$.

1.3.14. DEFINIÇÃO: $\tau(f') \in \pi_{k-1} V_q(\mathbb{R}^n)$ é a classe de homotopia da aplicação $S^{k-1} \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$x \mapsto (f'(e_1(\theta(x))), \dots, f'(e_q(\theta(x)))).$$

Seja S^k a esfera que circunscreve D^k em seu plano equatorial.



Seja $\theta': D^k \rightarrow \Delta^k$ uma extensão de θ ao disco e seja $\rho': S^k \rightarrow \Delta^k$ a aplicação composta

$\rho' = \theta' \circ \rho$, onde $\rho: S^k \rightarrow D^k$ é a projeção vertical $\rho(x_1, \dots, x_{k+1}) = (x_1, \dots, x_k)$,

$\forall x = (x_1, \dots, x_{k+1}) \in S^k$.

Sejam (f, f') e (g, g') \mathbb{R}^q - imersões de Δ^k em \mathbb{R}^n tangentes em ∂D^k .

1.3.15. DEFINIÇÃO: $\Omega(f', g') \in \pi_k V_q(\mathbb{R}^n)$ é a classe de homotopia da aplicação $S^k \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n)$

$$x \mapsto \begin{cases} (f'(e_1(\rho'(x))), \dots, f'(e_q(\rho'(x)))) , & \text{se } x_{k+1} \geq 0 , \\ (g'(e_1(\rho'(x))), \dots, g'(e_q(\rho'(x)))) , & \text{se } x_{k+1} \leq 0 . \end{cases}$$

PROPRIEDADES DE τ E Ω

1.3.16. TEOREMA: Se $(f, f'): \partial \Delta^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma \mathbb{R}^q - imersão, com $k < n$, e se $\tau(f') = 0$, então (f, f') se estende a uma \mathbb{R}^q - imersão de Δ^k em \mathbb{R}^n .

Demonstração: Primeiramente construiremos uma \mathbb{R}^q - imersão (κ, κ') de D^k em \mathbb{R}^n com $\tau(\kappa') = \tau(f')$.

Para isto, seja $h: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma extensão admissível de (f, f') com $\partial \Delta^k \subset U \subset \mathbb{R}^q$, U aberto. Seja $\epsilon > 0$ um número tal que a vizinhança $V(\epsilon)$ em \mathbb{R}^q de $\partial \Delta^k$ dada por

$$V(\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^q: \text{distância}(x, \partial \Delta^k) < \epsilon\}$$

esteja contida em U .

Seja $\alpha: D^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ um mergulho preservando a orientação tal que $\alpha(S^{k-1}) \subset \text{interior}(\Delta^k)$ e, para todo $x \in S^{k-1}$, distância $(\alpha(x), \theta(x)) < \epsilon$.

Então $\alpha(S^{k-1}) \subset \mathbb{R}^k \cap V(\epsilon) \subset U$.

Observemos que $\alpha|_{S^{k-1}}$ é homotópica a θ .

Seja $\kappa_1: S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a imersão $h_0(\alpha|_{S^{k-1}})$ e seja $\kappa'_1: T\mathbb{R}^q|_{S^{k-1}} \rightarrow T\mathbb{R}^n$ dada por

$$\kappa'_1(e_i(x)) = h_*\alpha_*(e_i(x)) \quad \text{se } i = 1, \dots, k \text{ e}$$

$$\kappa'_1(e_i(x)) = h_*e_i(\alpha(x)), \quad \text{se } i = k+1, \dots, q.$$

O par (κ_1, κ'_1) é uma \mathbb{R}^q -imersão de S^{k-1} em \mathbb{R}^n (uma extensão admissível pode ser construída de modo análogo ao da prova de 1.3.3).

Mostremos que $\tau(f') = \tau(\kappa'_1)$.

Cada uma das aplicações $S^{k-1} \rightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$, definidas respectivamente por $x \mapsto \alpha_*e_i(x)$ e $x \mapsto e_i(\alpha(x))$, $i = 1, \dots, k$, é homotopicamente nula, pois se estendem ao disco D^k , e portanto são homotópicas entre si.

Como $\tau(\kappa'_1)$ é representado pela aplicação

$$S^{k-1} \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n)$$

$$x \mapsto (h_* \alpha_* e_1(x), \dots, h_* \alpha_* e_k(x), e_{k+1}(\alpha(x)), \dots, e_q(\alpha(x))),$$

que é homotópica a

$$S^{k-1} \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n)$$

$$x \mapsto (h_* e_1(\alpha(x)), \dots, h_* e_q(\alpha(x))),$$

a qual, por sua vez, é homotópica a

$$S^{k-1} \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n)$$

$$x \mapsto (h_* e_1(\theta(x)), \dots, h_* e_q(\theta(x))),$$

através da homotopia $\alpha_t: S^{k-1} \rightarrow U$, entre $\alpha|_{S^{k-1}}$ e θ , dada por

$$\alpha_t(x) = (1-t)\alpha(x) + t(\theta(x) - \alpha(x)).$$

Como $h_* = f'$ em $T\mathbb{R}^q|_{\partial\Delta^k}$, essa última aplicação representa $\tau(f')$, e concluímos que $\tau(\kappa') = \tau(f')$.

Suponhamos agora que $\tau(f') = 0$.

Por 1.3.11., (κ_1, κ'_1) pode ser estendida a uma \mathbb{R}^q - imersão (κ, κ') de D^k em \mathbb{R}^n .

Vamos construir a extensão de (f, f') .

Seja $(g, g'): \alpha(D^k) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a \mathbb{R}^q - imersão definida por $g(\alpha(x)) = \kappa(x)$, $g'(\alpha_*(e_i(x))) = \kappa'_i e_i(x)$, para $i = 1, \dots, k$, e $g'(e_i(\alpha(x))) = \kappa'(e_i(x))$, para $i = k+1, \dots, q$.

$$\text{Temos } (g, g')|_{\alpha(S^{k-1})} = (h, h_*)|_{\alpha(S^{k-1})}.$$

Seja g_1 uma extensão admissível de g . Aplicando o lema 1.3.12, podemos supor que g_1 e h coincidem numa vizinhança de $\alpha(S^{k-1})$ em \mathbb{R}^q .

Definimos a extensão (f_0, f'_0) de (f, f') justapondo h e g :
 $f_0: \Delta^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dada por $f_0(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x \in U \cap \Delta^k, \\ g_1(x) & \text{se } x \in \alpha(D^k) \end{cases}$

e $f'_0: T\mathbb{R}^q|_{\Delta^k} \rightarrow T\mathbb{R}^n$ é definido por:

se X é um vetor de $T\mathbb{R}^q|_{\Delta^k}$ na fibra sobre x ,

$$f'_0 X = \begin{cases} h_* X & \text{se } x \in U \cap \Delta^k, \\ g_{1*} X & \text{se } x \in \alpha(D^k) \end{cases}.$$

Isto completa a demonstração.

Observação: f admite uma extensão admissível que coincide com h em uma vizinhança de $\partial\Delta^k$.

Os dois teoremas seguintes apresentam as propriedades de Ω .

1.3.17. TEOREMA: Seja $k < n$. Se (f, f') e (g, g') são \mathbb{R}^q - imersões de Δ^k em \mathbb{R}^n tangentes em $\partial\Delta^k$ com $\Omega(f', g') = 0$, então existe uma \mathbb{R}^q - homotopia regular entre (f, f') e (g, g') .

Sua prova é similar à de 1.3.16 e não a apresentaremos aqui. Encontra-se em [H] (teorema 4.2).

1.3.18. TEOREMA: Sejam (f, f') , (g, g') e (h, h') \mathbb{R}^q - imersões de Δ^k em \mathbb{R}^n tangentes em $\partial\Delta^k$. Temos:

$$a) \Omega(f', g') + \Omega(g', h') = \Omega(f', h') ;$$

$$b) \Omega(f', f') = 0 ;$$

$$c) \text{ dado } \alpha \in \pi_k V_q(\mathbb{R}^n), \text{ existe } (g, g') \text{ tal que } \Omega(f', g') = \alpha ;$$

d) Suponhamos $\Omega(f', g') = 0$ e $k < n$. Seja $F: \Delta^k \times I \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n)$ uma homotopia (rel $\partial \Delta^k$) entre as aplicações

$$F_0: \Delta^k \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n)$$

$$x \mapsto (f'(e_1(x)), \dots, f'(e_q(x))) \quad e$$

$$F_1: \Delta^k \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n)$$

$$x \mapsto (g'(e_1(x)), \dots, g'(e_q(x)))$$

Então existe uma \mathbb{R}^q - homotopia regular (f_t, f'_t) entre (f, f') e (g, g') tal que a aplicação $\Delta^k \times I \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n)$ definida por $(x, t) \mapsto (f'_t(e_1(x)), \dots, f'_t(e_q(x)))$ é homotópica a $F(\text{rel } \partial \Delta^k \times I \cup \Delta^k \times \partial I)$.

Demonstração: Decorre diretamente da definição de Ω e de 1.3.9.

IMERSÕES DE VARIEDADES

Estudaremos o problema de estender M -imersões e M - homotopias regulares definidas no i -esqueleto de M para o $(i+1)$ -esqueleto.

Vamos transformar este problema no de estender secções de um certo fibrado.

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão k .

O grupo $GL(r)$ das matrizes reais $r \times r$ inversíveis, com $r \leq q$, age à direita sobre o fibrado $T_q M$ dos q -referenciais tangentes de M , através da multiplicação matricial

$$GL(r) \times T_q M \rightarrow T_q M$$

$$(A, (X_1, \dots, X_q)) \mapsto (X_1, \dots, X_q) \cdot A = (Y_1, \dots, Y_q), \text{ com}$$

$$Y_i = \sum_{j=1}^r a_{ji} X_j, \text{ se } i = 1, \dots, r, \text{ e } Y_i = X_i, \text{ se } i = r+1, \dots, q, \text{ onde}$$

$$A = (a_{ij}).$$

Consideraremos também a ação de $GL(r)$ à esquerda sobre $T_q M$ dada por $A \cdot (X_1, \dots, X_q) = (X_1, \dots, X_q) \cdot A^{-1}$.

Mais geralmente, sejam V e W espaços topológicos e G um grupo topológico atuando à direita sobre V e à esquerda sobre W .

1.3.19. DEFINIÇÃO: Uma aplicação contínua $f: V \rightarrow W$ é equivariante se comutar com a ação de G , ou seja,

$$f(v \cdot g) = g^{-1} \cdot f(v), \quad \forall v \in V \text{ e } \forall g \in G.$$

Por exemplo, se $f: M \rightarrow N$ for uma imersão entre as variedades M e N , $f_*: T_q M \rightarrow T_q N$ é equivariante em relação às ações de $GL(r)$ acima descritas.

1.3.20. DEFINIÇÃO: Uma homotopia é dita equivariante se o for em cada estágio.

Usaremos a notação $\underset{e}{\sim}$ para homotopia equivariante.

Sejam $\underset{\substack{\uparrow p \\ B}}{E}$ um G-fibrado principal e Y um espaço topológico com

G atuando à direita sobre E e à esquerda sobre Y.

O fibrado associado $\underset{\substack{\uparrow p' \\ B}}{E'}$ com fibra Y é construído como segue:

E' é o espaço quociente $\frac{E \times Y}{\sim}$, sob a equivalência

$(e, y) \sim (e.g, g^{-1}.y)$, $\forall e \in E, \forall y \in Y$ e $\forall g \in G$, e $p': E' \rightarrow B$ é a aplicação $p'((\overline{e, y})) = p(e)$, onde $(\overline{e, y})$ é a classe de equivalência de (e, y) .

1.3.21. TEOREMA: O espaço das secções do fibrado $\underset{\substack{\uparrow p' \\ B}}{E'}$ é homeomorfo

ao espaço das aplicações equivariantes de E em Y (ambos os espaços dotados da topologia compacto-aberta).

Demonstração: A cada aplicação $f': E \rightarrow Y$ equivariante associamos a secção $s: B \rightarrow E'$ dada por $s(x) = (\overline{e, f'(e)})$, onde e é qualquer elemento na fibra $E'_x = p'^{-1}(x)$ sobre $x \in B$. É trivial a verificação da consistência dessa definição.

Inversamente, dada a secção $s: B \rightarrow E'$, definimos $f': E \rightarrow Y$ por $f'(e) = y$, onde y é dado por $sp(e) = (\overline{e, y})$.

A continuidade das associações acima decorre das definições das topologias.

Este teorema transforma o problema de extensão de aplicações ou homotopias equivariantes no problema correspondente sobre secções.

Suponhamos agora que B seja um complexo simplicial.

Seja $L \subset B$ um subconjunto.

Denotemos por B_i o i -ésimo esqueleto de B e seja $s: L \cup B_i \rightarrow E'$ uma secção. Suponhamos também que Y seja simples na dimensão i .

Vamos apresentar resumidamente a construção da cocadeia obstrução de s . Maiores detalhes estão [St].

Para cada $x \in B$, seja π_x o grupo $\pi_i(p'^{-1}(x))$. Os grupos $\{\pi_x\}$ formam um sistema local.

Para cada simplexo σ de B , seja $b(\sigma)$ seu baricentro, e seja $C^{i+1}(B, L; \{\pi_{b(\sigma)}\})$ o grupo das $(i+1)$ - cocadeias relativas de $B \pmod{L}$ com valores no sistema local $\{\pi_{b(\sigma)}\}$.

A cocadeia obstrução $c(s)$ é definida como segue: suponhamos que σ tem uma orientação e seja $g_t: \partial\sigma \rightarrow \sigma$ uma homotopia tal que $g_0(x) = x$ e $g_1(x) = b(\sigma)$. Como s recobre g_0 , podemos construir uma homotopia s_t recobrindo g_t tal que $s_0 = s$.

Então $c(s)(\sigma)$ é a classe de homotopia da aplicação

$$s_1: \partial\sigma \rightarrow p'^{-1}(b(\sigma)).$$

1.3.22. DEFINIÇÃO: A obstrução a estender uma aplicação equivariante $f': p'^{-1}(L \cup B_i) \rightarrow Y$ é a cocadeia obstrução a estender a correspondente (por 1.3.20) secção $s: L \cup B_i \rightarrow E'$.

Usaremos a notação $c(f')$ para $c(s)$.

Então f' se estende a uma aplicação equivariante de $p^{-1}(L \cup B_{i+1})$ se e somente se $c(f') = 0$.

Da mesma maneira, podemos definir a obstrução à existência de homotopia equivariante.

1.3.23. DEFINIÇÃO: Se f' e g' são aplicações equivariantes que coincidem em $p^{-1}(L \cup B_i)$, a obstrução à existência de homotopia equivariante (rel $L \cup B_i$) entre f' e g' é a cocadeia obstrução à existência de homotopia (rel $L \cup B_i$) entre as secções correspondentes.

Será denotada $d(f', g') \in C^{i+1}(B, L; \{\pi_{i+1}(p'^{-1}(b_\sigma))\})$.

Especializaremos esses conceitos para simplexes Δ^k .

Seja $(f, f'): \partial\Delta^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma \mathbb{R}^q - imersão.

O fibrado $T_q(\mathbb{R}^q)|_{\Delta^k}$ é principal com grupo estrutural $GL(q)$

$$\begin{array}{c} \downarrow p \\ \Delta^k \end{array}$$

e $f': p^{-1}(\partial\Delta^k) \rightarrow T_q\mathbb{R}^n$ é equivariante.

Podemos substituir $T_q\mathbb{R}^n$ por $V_q(\mathbb{R}^n)$, pois são homotopicamente equivalentes, com $GL(q)$ atuando à esquerda em $V_q(\mathbb{R}^n)$.

Pelo visto acima, a obstrução a estender f' a $T_q\mathbb{R}^q|_{\Delta^k}$ é a cocadeia obstrução à extensão da secção correspondente s do fibrado E' com fibra $V_q(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{array}{c} \downarrow p' \\ \Delta^k \end{array}$$

A secção $s: \partial\Delta^k \rightarrow E'$ é definida por $s(x) = \overline{(X, f'(X))}$, onde X

é um vetor qualquer de $T_q \mathbb{R}^q$ na fibra sobre $x \in \partial \Delta^k$.

A obstrução é $c(f') \in C^k(\Delta^k, \partial \Delta^k; \pi_{k-1} V_q(\mathbb{R}^n))$ e $c(f')(\Delta^k)$ é a classe de homotopia da aplicação $s_1: \partial \Delta^k \rightarrow p'^{-1}(b)$, onde b é o baricentro de Δ^k . Lembremos que s_1 é o estágio final da homotopia s_t , com $s_0 = s$, e que recobre a homotopia $g_t: \partial \Delta^k \rightarrow \Delta^k$ com $g_0(x) = x$ e $g_1(x) = b$.

1.3.24. TEOREMA: $\tau(f') = c(f')(\Delta^k)$.

Demonstração: Basta calcular a classe de homotopia da aplicação $s_1: \partial \Delta^k \rightarrow p'^{-1}(b) = V_q(\mathbb{R}^n)$.

Isto pode ser feito a partir de uma trivialização ϕ do fibrado E' . A classe $c(f')(\Delta^k)$ será a classe de homotopia da aplicação

$$\begin{array}{c} \partial \Delta^k \\ \downarrow p' \\ \Delta^k \end{array}$$

composta

$$\partial \Delta^k \xrightarrow{s} E' \xrightarrow{\phi} \Delta^k \times V_q(\mathbb{R}^n) \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n).$$

Como uma trivialização $\phi: E' \rightarrow \Delta^k \times V_q(\mathbb{R}^n)$ é dada por $\phi((X, \bar{V})) = (p(X), XV)$, onde $X \in T_q \mathbb{R}^q|_{\Delta^k}$ e $V \in V_q(\mathbb{R}^n)$, $c(f')(\Delta^k)$ será a classe da aplicação.

$$x \mapsto \overline{(X, f'(X))} \xrightarrow{\phi} (x, Xf'(X)) \mapsto Xf'(X) = f'(XX^{-1}) = f'(I_X),$$

onde I_X é a matriz identidade da fibra $(T_q \mathbb{R}^q)_x = GL(q)$.

Isto mostra que $c(f')(\Delta^k)$ é a classe da aplicação

$$\begin{array}{c} \partial \Delta^k \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n) \\ x \mapsto (f'(e_1(x)), \dots, f'(e_q(x))) \end{array},$$

que é exatamente $\tau(f')$.

Um cálculo semelhante determina $d(f',g')(\Delta^k)$.

1.3.25. TEOREMA: Sejam (f,f') e $(g,g') : \Delta^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas \mathbb{R}^q -imersões tangentes em $\partial\Delta^k$. Então $\Omega(f',g') = d(f',g')(\Delta^k)$.

Os próximos teoremas relacionarão propriedades de extensão de aplicações equivariantes com as correspondentes propriedades de \mathbb{R}^q -imersões de simplexes.

1.3.26. TEOREMA: Seja $(f,f') : \partial\Delta^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma \mathbb{R}^q -imersão, com $k < n$. Suponhamos que exista uma extensão equivariante $h' : T_q \mathbb{R}^q|_{\Delta^k} \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n)$ de f' .

Então (f,f') pode ser estendida a uma \mathbb{R}^q -imersão $(g,g') : \Delta^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $h' \simeq_e g'(\text{rel } \partial\Delta^k)$.

Demonstração: Como f' admite extensão, $\tau(f') = 0$.

Por 1.3.16, (f,f') admite uma extensão (κ,κ') com κ' coincidente com h' em $T_q \mathbb{R}^q|_{\partial\Delta^k}$.

Por 1.3.18c, existe uma \mathbb{R}^q -imersão $(g,g') : \Delta^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\Omega(\kappa',g') = d(\kappa',h')$.

Então $d(g',h') = d(g',\kappa') + d(\kappa',h') = \Omega(g',\kappa') + d(\kappa',h')$.

Como $d(\kappa',h') = \Omega(\kappa',g') = -\Omega(g',\kappa')$, temos $d(g',h') = 0$ e portanto $g' \simeq_e h'(\text{rel } \partial\Delta^k)$.

1.3.27. TEOREMA: Sejam $(f, f'), (g, g'): \Delta^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas \mathbb{R}^q -imersões tangentes em $\partial\Delta^k$. Seja $h'_t: T_q \mathbb{R}^q|_{\Delta^k} \rightarrow V_q(\mathbb{R}^n)$ uma homotopia equiva_{riante} (rel $\partial\Delta^k$) entre f' e g' .

Então existe uma \mathbb{R}^q -homotopia regular (rel $\partial\Delta^k$) (f_t, f'_t) entre (f, f') e (g, g') tal que as duas aplicações de $T_q \mathbb{R}^q|_{\Delta^k} \times I$ em $V_q(\mathbb{R}^n)$ dadas respectivamente por $(X, t) \mapsto h'_t X$ e $(X, t) \mapsto f'_t X$ são equivariantemente homotópicas (rel $(T_q \mathbb{R}^q|_{\partial\Delta^k} \times I) \cup (T_q \mathbb{R}^q|_{\Delta^k} \times \partial I)$).

Aqui o grupo $GL(q)$ age trivialmente sobre I .

Demonstração: Segue de 1.3.18 d.

Vamos agora aplicar estes resultados a subcomplexos de variedades.

Em tudo o que segue, M é uma variedade diferenciável de dimensão k , que admite triangulação C^∞ de modo a cada simplexo se apresentar mergulhado em M , e N é uma variedade diferenciável de dimensão n sem bordo.

1.3.28. TEOREMA: Sejam K e L subcomplexos de M com $K \subset L$.

Seja $(f, f'): K \rightarrow N$ uma M -imersão e suponhamos que f' se estenda a uma aplicação $\phi': T_k M|_L \rightarrow T_k N$ equivariante.

Seja ε um número positivo.

Então existe uma M -imersão $(g, g'): L \rightarrow N$ tal que

$$1) (g, g')|_K = (f, f');$$

$$2) g' \approx_\varepsilon \phi'(\text{rel } K);$$

3) se $\phi: L \rightarrow N$ é a aplicação recoberto por ϕ' , então
distância $(g(x), \phi(x)) < \varepsilon$, $\forall x \in L$.

Demonstração: A idéia é reduzir tudo ao caso de estender uma imersão definida no bordo de um simplexo de M cuja imagem se localize numa vizinhança coordenada de N (e portanto em \mathbb{R}^n). Então usamos a existência da extensão de f' para concluir que $\tau(f') = 0$.

Seja $U = \{U_i\}$ uma família de abertos coordenados convexos, de diâmetro menor que ε em N , que cobre $\phi(L)$.

Seja L' uma subdivisão de L suficientemente fina para que cada simplexo σ de L' esteja contido numa vizinhança coordenada, e tenha sua imagem $\phi(\sigma)$ em algum U_i .

Denotemos por $U(\sigma)$ um particular elemento da família U tal que $\phi(\sigma) \subset U(\sigma)$.

Seja $V(\sigma) = \bigcap_{\sigma \subset \rho} U(\rho)$, com a intersecção tomada sobre todos os simplexos ρ que possuam σ por face. Então $V(\sigma)$ é vizinhança coordenada convexa e contém $\phi(\sigma)$. Ainda, se $\sigma \subset \rho$, $V(\sigma) \subset V(\rho)$.

Seja \bar{L}_i a união de K com o i -ésimo esqueleto de L' .

Vamos definir indutivamente uma M -imersão $(h_i, h'_i): \bar{L}_i \rightarrow N$ tal que:

i) $h_i(\sigma) \subset V(\sigma)$;

ii) existe uma homotopia equivariante (rel K) ψ_t entre h'_i e $\phi'|_{(T_K M| \bar{L}_i)}$ tal que se $\sigma \subset \bar{L}_i$ e $X \in T_K M| \sigma$, então $\psi_t(X) \in T_K N| V(\sigma)$;

iii) $(h_i, h'_i)|_K = (f, f')$.

Esta indução completa a demonstração do teorema.

O primeiro passo é dado definindo-se $(h_0, h'_0): \bar{L}_0 \rightarrow N$ por $(h_0, h'_0) = (\phi, \phi')|_{\bar{L}_0}$. É C^∞ e é uma M-imersão pois uma extensão admissível pode ser construída usando-se a projeção do fibrado nos pontos de $\bar{L}_0 - K$ e coincidindo com (f, f') em K . Satisfaz (i), (ii) e (iii).

Agora suponhamos que $(h_i, h'_i): \bar{L}_i \rightarrow N$ seja uma M-imersão para a qual valem (i), (ii) e (iii).

Seja $\sigma \subset \bar{L}_{i+1}$ um simplexo de dimensão $i+1$ não contido em K . Seja W uma vizinhança coordenada de σ em M . Identificando-se W com \mathbb{R}^k e $V(\sigma)$ com \mathbb{R}^n , $(h_i, h'_i)|_W$ pode ser pensada como uma \mathbb{R}^q -imersão de $\partial\sigma$ em \mathbb{R}^n .

Por 1.3.26, podemos estender (h_i, h'_i) a σ de modo a satisfazer (ii).

Se $\sigma \subset K$, definimos (h_{i+1}, h'_{i+1}) como sendo $(f, f')|_\sigma$.

Desse modo, (h_i, h'_i) pode ser estendida sobre cada $(i+1)$ -simplexo de L . Além disso, podemos supor que todas essas extensões coincidem em alguma vizinhança de L , como vimos na prova de 1.3.16.

Então colocamos todas as extensões juntas e obtemos (h_{i+1}, h'_{i+1}) satisfazendo (i), (ii) e (iii).

Isto completa a indução.

O próximo teorema é tecnicamente mais elaborado e não apresentaremos sua demonstração.

1.3.29. TEOREMA: Sejam K e L subcomplexos de M com $K \subset L$.

Sejam $(f, f'), (g, g'): L \rightarrow N$ duas M -imersões.

Seja $(f_t, f'_t): K \rightarrow N$ uma M -homotopia regular satisfazendo às seguintes condições:

i) $(f_0, f'_0) = (f, f')|_K$, $(f_1, f'_1) = (g, g')|_K$;

ii) existe uma homotopia regular de uma vizinhança de K em N que é extensão admissível de f_t em cada estágio t .

Suponhamos também que f'_t possa ser estendida a uma homotopia equivariante $\phi'_t: T_k M|L \rightarrow T_k N$ tal que $\phi'_0 = f'$ e $\phi'_1 = g'$.

Seja $\epsilon > 0$.

Conclusão: (f_t, f'_t) pode ser estendida a uma M -homotopia regular $(h_t, h'_t): L \rightarrow N$ tal que:

1) $(h_0, h'_0) = (f, f')$ e $(h_1, h'_1) = (g, g')$;

2) as aplicações h' e ϕ' de $(T_k M|L) \times I$ em $T_k N$ são equivamente homotópicas ($\text{rel}(T_k M|L \times \partial I) \cup (T_k M|K \times I)$);

3) existe uma homotopia regular de uma vizinhança de L que é extensão admissível de h_t , para cada t ; e

4) se $\phi_t: L \rightarrow N$ é a única aplicação recoberta por ϕ'_t , então distância $(h_t(x), \phi_t(x)) < \epsilon$.

Demonstração: Vide [H].

Podemos agora concluir pela existência de bijeção entre as classes de homotopia regular de imersões de M em N e as classes de

homotopia equivariante de $T_k M$ em $T_k N$, desde que $k < n$.

1.3.30. COROLÁRIO: Se $k < n$, a associação $f \mapsto f_*$ fornece uma bijeção entre as classes de homotopia regular de imersões $f: M^k \rightarrow N^n$ e as classes de homotopia equivariante de $T_k M$ em $T_k N$.

Demonstração: É claro que se as imersões f e $g: M \rightarrow N$ forem regularmente homotópicas, então f_* e g_* serão equivariantemente homotópicas.

Reciprocamente, dada uma aplicação equivariante $f': T_k M \rightarrow T_k N$, aplicando-se o teorema 1.3.27 com $L=M$ e K vazio, obtemos uma imersão $f: M \rightarrow N$ com $f_* \approx_e f'$.

A injetividade decorre de 1.3.28.

§ 4. APLICAÇÕES DA TEORIA DE HIRSCH

Apresentaremos a seguir alguns resultados que demonstram o alcance e a profundidade do trabalho de Hirsch.

O TEOREMA DO FIBRADO NORMAL

Como vimos em 1.1.1, se $f: M^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ for uma imersão da variedade M^k em \mathbb{R}^n , com $n > k$, existe um fibrado vetorial $v(f)$ de posto $n - k$, denominado fibrado normal da imersão f , que satisfaz à equação de fibrados

$$TM \oplus v(f) = n.$$

Hirsch demonstrou a recíproca do exposto acima :
 dado um fibrado vetorial v com $TM \oplus v = n$, então existe uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ cujo fibrado normal é isomorfo a v .

Isto reduz o problema da imersibilidade de M a se conhecer o fibrado v de menor posto tal que a soma de Whitney $TM \oplus v$ trivialize.

Em tudo o que segue, M^k é uma variedade diferenciável de dimensão $k < n$.

Como usualmente, identificamos $T_r \mathbb{R}^n$ com $V_r(\mathbb{R}^n)$, por translação paralela.

1.4.2. TEOREMA : M^k imerge em \mathbb{R}^n com um r -campo transversal se e somente se existe uma aplicação equivariante $\Psi : T_k M \rightarrow V_{k+r}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, dado tal Ψ , existe uma imersão $f : M^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um r -campo transversal ϕ tal que a aplicação $T_k M \rightarrow V_{k+r}(\mathbb{R}^n)$, definida por

$$(X_1, \dots, X_k) \longmapsto (f_* X_1, \dots, f_* X_k, \phi_1(x), \dots, \phi_r(x)),$$

onde os vetores tangentes X_i estão na fibra sobre $x \in M$ e $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_r(x))$, é equivariantemente homotópica a Ψ .

Demonstração : Se M imergir em \mathbb{R}^n com um r -campo transversal $\phi : M \rightarrow V_r(\mathbb{R}^n)$, a aplicação equivariante $\Psi : T_k M \rightarrow V_{k+r}(\mathbb{R}^n)$ é obviamente definida por

$$\Psi(X_1, \dots, X_k) = (f_* X_1, \dots, f_* X_k, \phi_1(x), \dots, \phi_r(x)),$$

$$\forall (X_1, \dots, X_k) \in (T_k M)_x.$$

Vamos provar a recíproca.

Suponhamos dada uma aplicação equivariante $\psi: T_k M \rightarrow V_{k+r}(\mathbb{R}^n)$.

Seja $p: V_{k+r}(\mathbb{R}^n) \rightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$ a projeção fibrada que despreza os últimos r vetores de cada $(k+r)$ - referencial. A composta $p \circ \psi: T_k M \rightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$ é equivariante.

Aplicando-se o teorema 1.3.28, com $L = M, N = \mathbb{R}^n$ e K vazio, existe uma imersão $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f_*: T_k M \rightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$ é equivamente homotópica a $p \circ \psi$.

Em termos de diagrama temos

$$\begin{array}{ccc} & & V_{k+r}(\mathbb{R}^n) \\ & \nearrow \psi & \downarrow \\ T_k M & \xrightarrow[p \circ \psi]{f_*} & V_k(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

e como $p: V_{k+r}(\mathbb{R}^n) \rightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$ tem a propriedade do levantamento de homotopia, existe uma aplicação equivariante $g: T_k M \rightarrow V_{k+r}(\mathbb{R}^n)$ com $p \circ g = f_*$.

Podemos então definir um r -campo transversal a f , $\phi: M \rightarrow V_r(\mathbb{R}^n)$ por $\phi(x) = (Y_{k+1}, \dots, Y_{k+r})$, onde $g(X_1, \dots, X_k) = (Y_1, \dots, Y_{k+r})$, para qualquer referencial $(X_1, \dots, X_k) \in (T_k M)_x$.

Pela definição da ação de $GL(k)$ sobre $V_{k+r}(\mathbb{R}^n)$, $(Y_{k+1}, \dots, Y_{k+r})$ depende apenas de x .

Como $p \circ g = f_*$, os vetores Y_1, \dots, Y_k geram o espaço tangente a $f(M)$ em $f(x)$ e portanto ϕ é um r -campo transversal.

Isto completa a demonstração.

1.4.3. COROLÁRIO (TEOREMA DO FIBRADO NORMAL): Seja v^{n-k} um fibrado vetorial de posto $n-k$ sobre a variedade M^k e suponhamos que $TM \oplus v^{n-k} = n$. Então existe uma imersão $f: M^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ cujo fibrado normal é isomorfo a v .

Demonstração: Como $TM \oplus v^{n-k}$ é trivial, existe uma aplicação fibrada

$$\begin{array}{ccc} TM \oplus v & \xrightarrow{i} & M \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & M \end{array}$$

Seja $i|_{TM}: TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$ a aplicação definida por $(i|_{TM})(X) = i(X \oplus 0)$, $\forall X \in TM$. Seja $p_2: M \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção na segunda coordenada.

A aplicação composta $g = p_2 \circ (i|_{TM}): TM \rightarrow \mathbb{R}^n$ é linear injetora quando restrita às fibras de TM .

Então podemos definir uma aplicação equivariante

$\psi: T_k M \rightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$, dada por $\psi(X_1, \dots, X_k) = (g(X_1), \dots, g(X_k))$, $\forall (X_1, \dots, X_k) \in T_k M$.

Aplicando o teorema 1.4.2, conseguimos uma imersão $f: M^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $f_* \cong \psi$.

Sejam γ_n^k e γ^1 o fibrado canônico e seu complementar ortogonal sobre a grassmanniana dos k -planos de \mathbb{R}^n .

A aplicação equivariante $\psi: T_k M \rightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$ e a imersão

$f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ induzem aplicações fibradas

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\quad} & \gamma_n^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\bar{\phi}} & G_k(\mathbb{R}^n) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\quad} & \gamma_n^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\bar{f}} & G_k(\mathbb{R}^n) \end{array} ,$$

respectivamente, com $v = \bar{\phi}^! \gamma^\perp$ e $v(f) = \bar{f}^! \gamma^\perp$.

Como $\psi \simeq f_*$, temos $\bar{\phi} \simeq \bar{f}$ e portanto $v(f)$ é isomorfo a v , uma vez que aplicações classificantes homotópicas induzem fibrados isomorfos.

1.4.4. COROLÁRIO: Se M^k é paralelizável, então M^k imerge em \mathbb{R}^{k+1} .

Usando a correspondência entre aplicações equivariantes e secções (1.3.21), o teorema 1.4.2 pode ser reenunciado como segue.

1.4.5. TEOREMA: A variedade M^k imerge em \mathbb{R}^n com um r-campo transversal se e somente se o fibrado associado a $T_k M$ com fibra $V_{k+r}(\mathbb{R}^n)$ tem uma secção.

Quando o fibrado normal de uma imersão apresentar um subfibrado trivial, é possível reduzir a codimensão da imersão.

1.4.6. TEOREMA: Se M^k imerge em \mathbb{R}^{n+r} com um r-campo transversal, então M^k imerge em \mathbb{R}^n .

Demonstração: É suficiente mostrar que M imerge em \mathbb{R}^{n+r-1} com fibrado normal que possua $(r-1)$ secções independentes.

Seja $f: M^k \rightarrow \mathbb{R}^{n+r}$ uma imersão com um r -campo transversal. Podemos ortonormalizar esse campo, obtendo um r -campo ortonormal ξ . Cada coordenada ξ_i de ξ determina uma aplicação de M na esfera unitária S^{n+r-1} de \mathbb{R}^{n+r} , que também denotaremos por ξ_i .

Seja $\phi: T_k M \rightarrow T_{k+r-1} S^{n+r-1}$ a aplicação dada por $\phi(X_1, \dots, X_k) = (f_* X_1, \dots, f_* X_k, \xi_1(x), \dots, \xi_{r-1}(x))$, onde o k - referencial tangente (X_1, \dots, X_k) está na fibra sobre x .

Então ϕ é recobrimento de ξ_r e é equivariante:

$$\begin{array}{ccc} T_k M & \xrightarrow{\phi} & T_{k+r-1} S^{n+r-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\xi_r} & S^{n+r-1} \end{array}$$

Como $k < n+r-1$, pois $n > k$ e $r \geq 1$, a aplicação ξ_r é homotópica à aplicação constante $M \rightarrow a \in S^{n+r-1}$.

Esta homotopia pode ser recoberta por uma homotopia equivariante ϕ_t com $\phi_0 = \phi$.

Então $\phi_1: T_k M \rightarrow (T_{k+r-1} S^{n+r-1})_a = V_{k+r-1}(\mathbb{R}^{n+r-1})$ é equivariante e podemos aplicar o teorema 1.4.2, obtendo uma imersão de M^k em \mathbb{R}^{n+r-1} com $(r-1)$ secções normais independentes.

HOMOTOPIA REGULAR

Vamos caracterizar as classes de homotopia regular de M^{2k} em \mathbb{R}^{4k} através de uma bijecção nas classes pares de $H^{2k}(M^{2k}; \mathbb{Z})$, para

variedades compactas orientadas. Este resultado é uma generalização do teorema 1.2.4. de Smale.

Sejam f e g imersões do disco D^k em \mathbb{R}^{2k} tangentes no bordo ∂D^k .

Sejam $v^k(f)$ e $v^k(g)$ os fibrados normais das imersões f e g respectivamente e consideremos os fibrados de esferas associados $S(v^k(f))$ e $S(v^k(g))$ sobre D^k .

Seja ξ um campo de vetores normais a f (e a g) definido em ∂D^k . A cocadeia obstrução a estender ξ a $f(D^k)$, calculada no gerador de $C_k(D^k, \partial D^k)$, fornece um valor $c \in \pi_{k-1} S^{k-1}$ e, do mesmo modo, a cocadeia obstrução a estender ξ a $g(D^k)$ fornece $c' \in \pi_{k-1} S^{k-1}$.

Consideremos a fibração $S^{k-1} \subset V_{k+1}(\mathbb{R}^{2k})$ e

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ V_k(\mathbb{R}^{2k}) \end{array}$$

seja $\partial: \pi_k V_k(\mathbb{R}^{2k}) \rightarrow \pi_{k-1} S^{k-1}$ o operador bordo da sequência exata de homotopia da fibração.

Temos o seguinte lema.

1.4.7. LEMA: $\partial \Omega(f, g) = c - c'$.

Demonstração: Seja S^k a esfera obtida identificando-se pelo bordo duas cópias de D^k , e seja $B = v(f) \bigcup_{\partial} v(g)$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ S^k \end{array}$$

o fibrado obtido de $v(f)$ e $v(g)$ identificando-se $v(f)|_{\partial D^k}$ com

$v(g) \mid \partial D^k$.

Seja $w: S^k \rightarrow V_k(\mathbb{R}^{2k})$ a aplicação dada por

$$w(x) = \begin{cases} f_*(e_1(x), \dots, e_k(x)), & \text{se } x \in S_+^k, \\ g_*(e_1(x), \dots, e_k(x)), & \text{se } x \in S_-^k, \end{cases}$$

onde (e_1, \dots, e_k) é o k-referencial tangente canônico em D^k .

Então $\Omega(f, g)$ é a classe de homotopia de w e temos

$\Omega(f, g) = w_{\#}(S)$, onde S é o gerador de $\pi_k S^k$ que corresponde à orientação de S^k que mantém a orientação de D^k no hemisfério superior S_+^k .

Temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} B = v(f) \cup v(g) & \xrightarrow{\psi} & V_{k+1}(\mathbb{R}^{2k}) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \\ S^k & \xrightarrow{w} & V_k(\mathbb{R}^{2k}) \end{array}$$

onde ψ é dado por

$$\psi(X) = \begin{cases} (f_* \cdot e_1(x), \dots, f_* \cdot e_k(x), X), & \text{se } X \in B_x \text{ com } x \in S_+^k, \\ (g_* \cdot e_1(x), \dots, g_* \cdot e_k(x), X), & \text{se } X \in B_x \text{ com } x \in S_-^k. \end{cases}$$

Em nível de homotopia, o diagrama acima induz o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_k S(B) & \xrightarrow{\psi_{\#}} & \pi_k V_{k+1}(\mathbb{R}^{2k}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_k S^k & \xrightarrow{w_{\#}} & \pi_k V_k(\mathbb{R}^{2k}) \\ \partial \downarrow & & \partial \downarrow \\ \pi_{k-1} S^{k-1} & \xrightarrow{\text{identidade}} & \pi_{k-1} S^{k-1} \end{array}$$

onde $S(B)$ é o fibrado de esferas associado a B .

Então $\partial \Omega(f, g) = \partial w_{\#}(S) = \partial S$.

É fato conhecido de teoria de obstrução (vide [St], 35.12) que $\partial(S)$ é o índice de Kronecker da classe de cohomologia da cocadeia obstrução à extensão em B pelo gerador de $H_k S^k$.

A cocadeia obstrução à extensão da secção ξ dada assume os valores c e $-c$ nos hemisférios S_+^k e S_-^k , respectivamente, desde que coerentemente orientados.

Logo $\partial\Omega(f,g) = \partial S = c - c'$.

1.4.8. TEOREMA: Seja M^k uma variedade compacta sem bordo orientada de dimensão k par. Duas imersões $f, g: M^k \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ são regularmente homotópicas se e somente se as classes normais $e(v(f))$ e $e(v(g))$ são iguais.

Além disso, qualquer classe de cohomologia par de $H^k(M, \mathbb{Z})$ é a classe normal de alguma imersão de M^k em \mathbb{R}^{2k} .

Demonstração: Se $f \approx g$, então seus fibrados normais são equivalentes e tem mesma classe normal.

Como $\pi_i V_k(\mathbb{R}^{2k}) = 0$ para $i < k$, podemos deformar f de modo a coincidir com g (ef_* com g_*) no $(k-1)$ -esqueleto de M^k , pelo teorema 1.3.29.

Podemos escolher a homotopia equivariante de modo que a cocadeia obstrução à extensão se anule no complementar de um disco D^k mergulhado em M^k , uma vez que $H^k(M^k - D^k; \mathbb{Z})$ é nulo.

Então, sem perda de generalidade, consideremos f coincidente com g em $M^k - D^k$.

Seja ξ um campo de vetores normais $\tilde{a} f(M^k - D^k) = g(M^k - D^k)$ e podemos supor que ξ está definido também no bordo de D^k .

Seja $m \in H^k(M; \mathbb{Z})$ o gerador correspondente a uma orientação de D^k . Temos $e(v(f)) = c m$ e $e(v(g)) = c' m$, onde c e c' são definidos como em 1.4.7.

$$\begin{array}{c} \text{Consideremos a fibração } S^{k-1} \subset V_{k+1}(\mathbb{R}^{2k}) \\ \downarrow \\ V_k(\mathbb{R}^{2k}) \end{array}$$

Como k é par, a sequência exata de homotopia se reduz a

$$0 \rightarrow \pi_k V_k(\mathbb{R}^{2k}) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1} S^{k-1} \rightarrow \pi_{k-1} V_{k+1}(\mathbb{R}^{2k}) \rightarrow 0$$

que é a sequência

$$0 \rightarrow Z \xrightarrow{\partial} Z \rightarrow Z_2 \rightarrow 0.$$

Temos então uma sequência exata em cohomologia

$$H^k(M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\delta^*} H^k(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial^*} H^k(M; \mathbb{Z}),$$

induzida pela sequência acima. Como $H^k(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\delta^* = 0$ e ∂^* é injetor.

$$\begin{aligned} \text{Pelo lema 1.4.7, } \partial^* (\Omega(f|_{D^k}, g|_{D^k})m) &= (c - c')m = \\ &= e(v(f)) - e(v(g)). \end{aligned}$$

Logo $e(v(f)) = e(v(g))$ implica $\Omega(f|_{D^k}, g|_{D^k}) = 0$ e portanto f e g são regularmente homotópicas.

Seja agora $\alpha = 2\beta m \in H^*(M^k, \mathbb{Z})$, onde m é o gerador correspondente à orientação de um disco D^k mergulhado em M^k .

Queremos encontrar uma imersão $g: M^k \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ tal que $e(v(g)) = \alpha$.

Como $\pi_i V_k(\mathbb{R}^{2k}) = 0$, para $i < k$, o fibrado associado a $T_k M^k$ com fibra $V_k(\mathbb{R}^{2k})$ tem uma secção, e, pelo teorema 1.4.5, existe uma imersão $f: M^k \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$.

Pelo teorema 1.2.3, existe uma imersão $g_1: D^k \subset M^k \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ tangente a f em ∂D^k e tal que $\Omega(g_1, f|_{D^k}) = \beta$.

Podemos então construir uma imersão $g: M^k \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ que estende g_1 e que coincide com f em $M^k - D^k$, utilizando o lema 1.3.12 para deformar suavemente g_1 e obter uma imersão C^∞ .

Então $\partial^*(\Omega(g|_{D^k}, f|_{D^k})_M) = e(v(g)) - e(v(f))$, e como ∂^* é multiplicação por 2, temos $2\beta = e(v(g)) - e(v(f))$ ou $e(v(g)) = \alpha + e(v(f))$.

Como $e(v(f))$ está fixada e α é arbitrária par, podemos encontrar imersões $g: M^k \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ que realizam quaisquer classes pares desejadas.

1.4.9. OBSERVAÇÃO: Se M^k não for compacta ou sem bordo, $H^k(M; \mathbb{Z}) = 0$, e as classes de obstrução se anulam.

Portanto duas quaisquer imersões f e g de M^k em \mathbb{R}^{2k} serão sempre regularmente homotópicas.

1.4.10. TEOREMA: Duas imersões quaisquer de M^k em \mathbb{R}^{2k+1} são sempre regularmente homotópicas.

Demonstração: A obstrução à homotopia regular toma valores em $\pi_k V_k(\mathbb{R}^{2k+1})$, que é nulo.

James e Thomas, em [J-T], de 1966, utilizando o trabalho de Hirsch, provam os seguintes teoremas.

1.4.11. TEOREMA: Seja M^k uma variedade diferenciável e seja ν o fibrado normal de uma imersão de M^k em \mathbb{R}^n , com $n \geq 2k + 2$.

Então o conjunto das classes de homotopia regular de M^k em \mathbb{R}^n é equivalente ao conjunto das classes de secções do fibrado dos k -referenciais ortonormais associado a ν .

Observemos que ν^{n-k} está no domínio estável, pois $n \geq 2k + 2$, e portanto sua classe de isomorfismo não depende da escolha da imersão de M^k em \mathbb{R}^n .

1.4.12. TEOREMA: Seja M^k uma variedade que imerge em \mathbb{R}^{k+1} . Então o conjunto das classes de homotopia regular de imersões de M^k em \mathbb{R}^{k+1} é equivalente ao conjunto das classes de homotopia $[M, SO(m+1)]$.

Como $SO(3)$ é o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^3$, temos

1.4.13. COROLÁRIO: Se M^2 é uma superfície fechada com característica de Euler χ , então existem precisamente $2^{2-\chi}$ classes de homotopia regular de imersões de M^2 em \mathbb{R}^3 .

Por exemplo, existem $2^2 = 4$ imersões do toro $S^1 \times S^1$ em \mathbb{R}^3 , a menos de homotopia regular.

CAPÍTULO II

UMA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA PARA FIBRADOS DE ESFERAS

§1. UMA ESTRUTURA DE GRUPO PARA CLASSES DE HOMOTOPIA DE APLICAÇÕES DE ESPAÇOS TOTAIS DE FIBRADOS DE ESFERAS COM SECÇÕES

2.1.1. CONDIÇÕES GEOMÉTRICAS SOBRE O FIBRADO

Consideremos uma variedade diferenciável M^m de dimensão m e um fibrado vetorial ξ sobre M com fibra \mathbb{R}^{k+1} dotado de métrica riemanniana.

Suponhamos que ξ admita duas secções linearmente independentes e portanto se decompõe na soma $\xi = \nu \oplus l \oplus l$, onde l representa, como usualmente, o fibrado trivial de posto 1 sobre M .

Nestas condições, o fibrado de esferas associado $S^k \subset S(\xi)$ apresenta duas secções $s, s': M \rightarrow S(\xi)$ que podemos considerar perpendiculares entre si.

Representaremos um ponto de $S(\xi)$ por (x, z) , com $x \in M$ e z na fibra sobre x .

Para cada $x \in M$, o vetor $s'(x)$ determina na fibra ξ_x um hiperplano equatorial que lhe é ortogonal e que divide a fibra S_x^k de $S(\xi)$ em dois hemisférios S_{x+}^k e S_{x-}^k , com $s'(x) \in S_{x-}^k$. Denominaremos $s'(x)$ de polo sul da fibra S_x^k . Como $s(x)$ é ortogonal a $s'(x)$, situa-se no equador da fibra sobre x .

Observemos que cada um dos fibrados de hemisférios

$$\begin{array}{ccc} S_+^k \subset S_+(\xi) & \text{e} & S_-^k \subset S_-(\xi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & & M \end{array}$$

é equivalente ao fibrado de discos $D^k \subset D(v \oplus 1)$ e $S(\xi)$ é obtido

$$\downarrow$$

M

pela colagem, pelo bordo, de duas cópias de $D(v \oplus 1)$.

Usaremos indistintamente a notação $S(\xi)$ para designar o fibrado de esferas e seu espaço total.

Seja E um espaço topológico e fixemos uma aplicação contínua $g: S(\xi) \rightarrow E$.

Seja \mathcal{C} o conjunto de todas as aplicações contínuas $f: S(\xi) \rightarrow E$ que coincidam com g na imagem da secção equatorial s , ou seja, $f \circ s = g \circ s$.

Consideremos em \mathcal{C} a relação de equivalência

$$f_1 \sim f_2 \text{ se e somente se } f_1 \approx f_2 \text{ rel } s(M).$$

A classe de f no conjunto quociente \mathcal{C}/\sim será denotado por $[f]$.

Vamos dotar o conjunto \mathcal{C}/\sim de uma estrutura de grupo.

2.1.2. LEMA: Para cada aplicação f em \mathcal{C} , existe $f^C \in \mathcal{C}$ tal que

i) $f^C \approx f \text{ rel } s(M)$, e

ii) para todo $x \in M$, a restrição $f^C|_{S_{x-}^k}: S_{x-}^k \rightarrow E$ é constante igual a $g \circ s(x)$.

Demonstração: Vamos construir uma aplicação $\varepsilon: S(\xi) \rightarrow S(\xi)$ tal que:

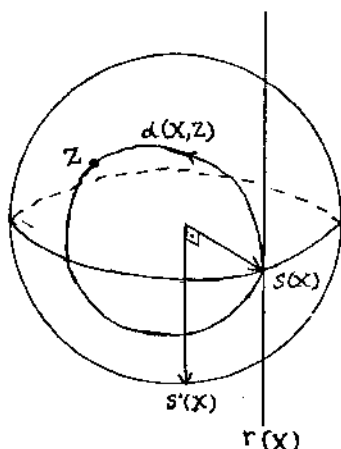
a) $\varepsilon \approx$ identidade rel $s(M)$; e para todo $x \in M$,

b) $\varepsilon|_{S_{x+}^k}: S_{x+}^k \rightarrow S_x^k$ é sobrejetora, e

c) $\varepsilon|_{S_{x-}^k}: S_{x-}^k \rightarrow S_x^k$ é constante igual a $s(x)$.

Feito isto, definimos $f^C = f \circ \varepsilon$.

Uma tal aplicação ε pode ser construída como segue.



Para cada $x \in M$, seja $r(x)$ a reta que passa pelo ponto $s(x)$ e é paralela ao vetor determinado por $s'(x)$.

Para cada $z \in S_x^k$, $z \neq s(x)$, seja $\alpha(x,z)$ a curva fechada determinada pela intersecção de S_x^k com o 2-plano de \mathbb{R}^{k+1} que passa por z e contém a reta $r(x)$.

Consideremos a curva $\alpha(x,z)$ parametrizada por comprimento de arco $\lambda(x,z)$, com início em $s(x)$ e sentido de percurso de $s(x)$ para z , passando primeiramente pelo hemisfério superior S_{x+}^k .

Definimos $\varepsilon: S(\xi) \rightarrow S(\xi)$ por

$$\varepsilon(x,z) = \begin{cases} \alpha(x,z)(2\lambda(x,z)), & \text{se } z \in S_{x+}^k - \{s(x)\}, \\ s(x), & \text{outros} \end{cases}$$

onde x pertence a M e z está na fibra S_x^k sobre x .

A definição de ε é consistente, uma vez que se z for equatorial, $2\lambda(x,z)$ é o comprimento total da curva $\alpha(x,z)$, e neste caso $\alpha(x,z)(2\lambda(x,z)) = s(x)$.

Claramente ϵ obedece às condições (a), (b) e (c) acima.

2.1.3. DEFINIÇÃO: Dada $f \in \mathcal{C}$, uma aplicação satisfazendo a (i) e (ii) do lema 2.1.2 é denominada concentrada de f no fibrado $S_+(\xi)$ dos hemisférios superiores, e será denotada por f^C .

Analogamente podemos definir uma aplicação f_C na mesma classe de equivalência de f mas tal que a restrição $f_C|_{S_{x+}^k}$ seja igual a $g \circ s(x)$, para todo $x \in M$. Denominaremos uma tal f_C de concentrada de f no fibrado $S_-(\xi)$ dos hemisférios inferiores.

Estamos agora em condições de definir uma estrutura de grupo no conjunto quociente \mathcal{C}/\sim .

2.1.4. MULTIPLICAÇÃO: Dadas $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$, sejam f_1^C a concentrada de f_1 em $S_+(\xi)$ e f_{2C} a concentrada de f_2 em $S_-(\xi)$.

Como f_1^C e f_{2C} coincidem no bordo $\partial S_+(\xi) = \partial S_-(\xi)$, podemos definir uma aplicação $f_1 \vee f_2 \in \mathcal{C}$ por justaposição:

$$(f_1 \vee f_2)|_{S_+(\xi)} = f_1^C|_{S_+(\xi)} \quad \text{e} \quad (f_1 \vee f_2)|_{S_-(\xi)} = f_{2C}|_{S_-(\xi)}.$$

Definimos então um produto em \mathcal{C}/\sim por

$$\mathcal{C}/\sim \times \mathcal{C}/\sim \rightarrow \mathcal{C}/\sim$$

$$([f_1], [f_2]) \mapsto [f_1 \vee f_2]$$

É simples verificar que este produto está bem definido e é as sociativo.

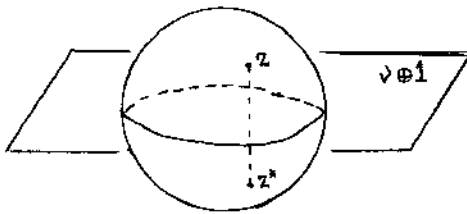
Denotaremos o produto de $[f_1]$ por $[f_2]$ simplesmente por

$$[f_1] \cdot [f_2] = [f_1 \vee f_2].$$

2.1.5. ELEMENTO NEUTRO: Seja $\pi : S(\xi) \rightarrow M$ a projeção fibrada e seja η a composta $\eta = g \circ s \circ \pi$.

A classe $1 = [\eta]$ será denominada elemento neutro, uma vez que $[f] \cdot [\eta] = [\eta] \cdot [f] = [f]$, $\forall [f] \in \mathcal{C}/\sim$.

2.1.6. ELEMENTO INVERSO: Seja $r : S(\xi) \rightarrow S(\xi)$ a reflexão equatorial em relação ao fibrado $v \oplus 1$, dada por $r(x, z) = (x, z^*)$, onde z^* é o re fletido de $z \in S_x^k$ em relação ao hiperplano equatorial de S_x^k .



Como o equador de cada fibra é in variante por r , dada uma aplicação f em \mathcal{C} , a composta $f \circ r$ ainda pertence a \mathcal{C} .

Definimos então a classe inversa de $[f]$ como sendo a classe $[f]^{-1} = [f \circ r]$.

É simples verificar que $[f] \cdot [f \circ r] = [1] = [f \circ r] \cdot [f]$.

2.1.7. NOTAÇÃO: O conjunto \mathcal{C}/\sim munido do produto definido em 2.1.4 é um grupo, que será denotado por

$$[S(\xi), E; g \circ s].$$

Observemos que se M for um ponto, $g \circ s$ se reduz a escolha de um ponto base $e \in E$ e o grupo $[S(\xi), E; g \circ s]$ é o grupo $\pi_k(E; e)$.

Em geral, o elemento neutro η não é necessariamente homotópico a uma constante, como mostra o seguinte exemplo.

2.1.8. EXEMPLO: Sejam $E = S(\xi)$ e g a identidade em $S(\xi)$.

O elemento neutro em $[S(\xi), S(\xi); s]$ é $\eta = [s \circ \pi]$.

Se $s \circ \pi \approx$ constante, como $\pi \circ s(x) = x$, para todo x em M , concluímos que $\pi \approx$ constante, e portanto M é contrátil.

Logo, se M não for contrátil, η não é homotopicamente nulo.

Se o fibrado ξ^{k+1} admitir três secções linearmente independentes,
 \downarrow
 M^m

podemos definir uma rotação nas fibras $S(\xi)$ que permuta os hemisférios superior e inferior, e o grupo $[S(\xi), E; g \circ s]$ será comutativo, qualquer que seja o espaço topológico E .

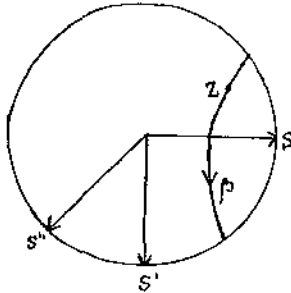
2.1.9. TEOREMA: Se ξ^{k+1} possuir três secções linearmente independentes,
 \downarrow
 M^m
 tes, o grupo $[S(\xi), E; g \circ s]$ é abeliano.

Demonstração: Sejam s, s' e s'' as três secções ortonormais de $S(\xi)$. Como anteriormente, s' é a secção polo sul e s e s'' são equatoriais.
 \downarrow
 M

As secções s' e s'' geram um subfibrado μ de 2-planos trivial que orientaremos pela escolha $(s''(x), s'(x))$ para cada fibra μ_x sobre

$x \in M$.

Para cada z na fibra S_x^k de $S(\xi)$, seja $\beta(x, z)$ a curva intersecção de S_x^k com o 2-plano que passa por z e é paralelo a μ_x .



Consideremos $\beta(x, z)$ parametrizada por comprimento de arco, com início em z e com orientação compatível com a escolhida para μ_x . Seja $\ell(x, z)$ o comprimento de uma volta da curva $\beta(x, z)$.

Definimos a rotação de 180° $\rho: S(\xi) \rightarrow S(\xi)$ por

$$\rho(x, z) = \beta(x, z) \left(\frac{\ell(x, z)}{2} \right)$$

Temos ρ homotópica a identidade (rel $s(M)$) e ρ permuta os fibros dos de hemisférios $S_+(\xi)$ e $S_-(\xi)$.

Dada $f \in \mathcal{C}$, sejam f^c e f_c as concentradas de f em $S_+(\xi)$ e $S_-(\xi)$, respectivamente. Observemos que $f^c \circ \rho = f_c$.

Sejam agora $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$. Como $(f_1 \vee f_2) \circ \rho = f_2 \vee f_1$, temos $[f_1 \vee f_2] = [f_2 \vee f_1]$ e o grupo é abeliano.

Em geral, o grupo $[S(\xi), E; g \circ s]$ não deve ser abeliano.

Achamos que um possível contra-exemplo é o seguinte.

2.1.10. Seja ξ o fibrado vetorial de posto 3 obtido somando-se duas

\downarrow
 S^1

componentes triviais ao fibrado faixa de Möbius: $\xi = m \oplus 1 \oplus 1$.

Então o fibrado de esferas associado $S(\xi)$ possui duas secções s e s' ortogonais mas não admite uma terceira.

Seja $S(\xi) \vee S(\xi)$ o espaço obtido identificando-se duas cópias de $S(\xi)$ pela imagem da secção $s(S^1)$:

$$S(\xi) \vee S(\xi) = \bigcup_{\theta \in S^1} (S(\xi)_\theta \times s(\theta)) \cup (s(\theta) \times S(\xi)_\theta) ,$$

onde $S(\xi)_\theta$ é a fibra sobre $\theta \in S^1$.

Consideremos as aplicações inclusão

$$\begin{array}{ll} i_1: S(\xi) \rightarrow S(\xi) \vee S(\xi) & \text{e} \quad i_2: S(\xi) \rightarrow S(\xi) \vee S(\xi) , \\ z \mapsto (z, s(p(z))) & z \mapsto (s(p(z)), z) \end{array}$$

onde $p: S(\xi) \rightarrow S^1$ é a projeção fibrada.

Nossa conjectura é que os elementos $[i_1] \cdot [i_2]$ e $[i_2] \cdot [i_1]$ do grupo $[S(\xi), S(\xi) \vee S(\xi); g \circ s]$ são distintos, onde $g: S(\xi) \rightarrow S(\xi) \vee S(\xi)$ é dada por $g(z) = (s(p(z)), s(p(z)))$.

Consequimos mostrar que não é possível existir uma homotopia (rel $s(S^1)$) entre $i_1 \vee i_2$ e $i_2 \vee i_1$ com a exigência de que a homotopia leve a fibra $S(\xi)_\theta$ em $S(\xi)_\theta \vee S(\xi)_\theta$, para todo $\theta \in S^1$.

§2. A CONSTRUÇÃO DE SMALE PARA FIBRADOS DE ESFERAS UTILIZANDO-SE O FIBRADO TANGENTE AO LONGO DAS FIBRAS.

Conforme orientação que nos foi dada, estudamos uma adaptação da construção do invariante de Smale para espaços totais de fibrados de esferas utilizando o fibrado tangente ao longo das fibras.

2.2.1. O FIBRADO TANGENTE AO LONGO DAS FIBRAS

Seja M^m uma variedade diferenciável de dimensão m e considere mos sobre M um fibrado vetorial de posto $k+1$ com estrutura diferenciável e dotado de uma métrica riemanniana.

O espaço total do fibrado de esferas $S(\xi)$ associada a ξ é uma variedade diferenciável de dimensão $m+k$ com fibrado tangente $TS(\xi)$ que admite um subfibrado, denotado $T_F S(\xi)$, constituído pelos vetores tangentes a curvas contidas nas fibras de $S(\xi)$. Esse subfibrado $T_F S(\xi)$ é denominado fibrado tangente ao longo das fibras de $S(\xi)$.

O complemento ortogonal $T_{\perp} S(\xi)$ de $T_F S(\xi)$ em $TS(\xi)$ é equivalente ao fibrado induzido $\pi^! TM$ do tangente de M pela projeção fibrada $\pi: S(\xi) \rightarrow M$, e temos

$$TS(\xi) = T_F S(\xi) \oplus \pi^! TM.$$

Em [C-S], Crabb e Sutherland, respondendo a uma questão de T.Y. Lam, mostraram a seguinte propriedade do fibrado tangente ao longo das fibras.

Se M^m for uma π -variedade, então a soma de Whitney $2T_F S(TM) = T_F S(TM) \oplus T_F S(TM)$ é trivial se e somente se: (a) $m = 2$ ou 4 ; ou (b) a característica de Euler $\chi(M)$ é divisível por 4 .

Assim, por exemplo, se $M = S^k$, $2T_F S(TS^k)$ é trivial se e somente se $k = 2$ ou 4 , ou é ímpar.

2.2.2. A CONSTRUÇÃO DO INVARIANTE

Consideremos um fibrado vetorial ξ de posto $k+1$, com estrutura diferenciável, sobre uma variedade M^m , que admite uma secção não nula diferenciável.

Fixando uma métrica riemanniana em ξ , podemos definir o fibrado de esferas associado $S^k \subset S(\xi)$, e o ponto $s(x)$, determinado pela secção na fibra $S(\xi)_x$ sobre $x \in M$, será denominado polo sul da fibra, como em 2.1.1.

O subfibrado de ξ complemento ortogonal de s determina um fibrado de hiperplanos equatoriais que divide cada fibra $S(\xi)_x$ em um hemisfério superior $S_+(\xi)_x$ e um hemisfério inferior $S_-(\xi)_x$.

O papel desempenhado pela secção s é exatamente possibilitar definir hemisférios nas fibras de $S(\xi)$.

Agora queremos que o fibrado tangente ao longo das fibras restrito ao fibrado dos hemisférios norte $T_F S(\xi)|_{S_+(\xi)}$ trivialize, a fim de acompanharmos a construção de Smale.

Seja $r: S(\xi) \rightarrow S(\xi)$ a reflexão equatorial em relação aos hiperplanos equatoriais determinados pelo complemento ortogonal de s .

A secção polo norte $r \circ s$ é um mergulho de M^m em $S_+(\xi)$ cujo fibrado normal é $(r \circ s)^*(T_F S(\xi))$. Se este for trivial, podemos definir um campo v de k -referenciais tangentes ao longo das fibras em $S_+(\xi)$, uma vez que o fibrado de hemisférios $S_+(\xi)$ se contrai na secção $r \circ s$.

Com essa condição, podemos realizar uma construção análoga à de Smale.

Sejam f e g duas imersões de $S(\xi)$ em \mathbb{R}^n , $n > m+k$, coincidentes em $S_-(\xi)$.

Definimos $\Omega_F(f,g): S(\xi) \rightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$ por

$$\Omega_F(f,g)(z) = f_*(z) \cdot v(z), \text{ se } z \in S_+(\xi), \text{ e}$$

$$\Omega_F(f,g)(z) = g_*(z) \cdot v(z), \text{ se } z \in S_-(\xi).$$

Essa definição é consistente pois f_* e g_* coincidem no equador de cada fibra de $S(\xi)$.

Se a variedade M for um ponto, $\Omega_F(f,g)$ é exatamente o invariante de Smale.

2.2.3. OBSERVAÇÕES SOBRE AS HIPÓTESES

A exigência das duas imersões f e g coincidirem em $S_-(\xi)$ pode ser abrandada considerando-se f e g tangentes na imagem da secção $s(M)$ e utilizando-se o lema 1.3.12 para deformar uma delas até coincidir com a outra em $S_-(\xi)$.

A primeira dificuldade estrutural em nossa construção é que o conjunto das classes de homotopia $[S(\xi), V_k(\mathbb{R}^n)]$ não apresenta uma estrutura de grupo, como no caso de Smale, que trabalhou com esferas.

Esta situação pode ser contornada considerando-se fibrados ξ sobre M com duas secções independentes, como em 2.1.

Se o fibrado tangente ao longo das fibras não trivializar sobre a imagem da secção, ainda assim podemos realizar uma construção semelhante à de Smale simplesmente trocando a variedade de Stiefel pela grassmanniana.

Dessa forma, dadas duas imersões f e g de $S(\xi)$ em \mathbb{R}^n coincidentes em $S_-(\xi)$, definimos

$$\phi_F(f, g): S(\xi) \rightarrow G_K(\mathbb{R}^n)$$

por $\phi_F(f, g)(z) = f_*(T_F S(\xi)_z)$, se $z \in S_+(\xi)$, e

$$\phi_F(f, g)(z) = g_*(T_F S(\xi)_{rz}), \text{ se } z \in S_-(\xi).$$

Um exemplo dessa situação é dado pelo fibrado $S^1 \subset K$ garrafa
 \downarrow
 S^1
 de Klein sobre S^1 , onde o fibrado tangente ao longo das fibras é não orientado.

2.2.4. NULIDADE DE $\Omega_F(g, g)$.

Consideremos, como em 2.2, um fibrado de esferas $S^k \subset S(\xi)$ com
 \downarrow
 M^m
 uma secção, e tal que o fibrado tangente ao longo das fibras trivialize em $S_+(\xi)$.

Seja $g: S(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão, com $n > m+k$.

Nestas condições, a aplicação $\Omega_F(g, g)$ se fatora de acordo com o diagrama

$$\begin{array}{ccc} S(\xi) & \xrightarrow{\Omega_F(g, g)} & V_K(\mathbb{R}^n) \\ \text{ret} \searrow & & \nearrow g_* \circ v \\ & S_+(\xi) & \end{array}$$

onde $\text{ret}: S(\xi) \rightarrow S(\xi)$ é a aplicação dada por

$\text{ret}(z) = z$ se $z \in S_+(\xi)$ e $\text{ret}(z) = r(z)$, se $z \in S_-(\xi)$, sendo r a reflexão equatorial definida em 2.2.2.

Como $S_+(\xi)$ tem o tipo de homotopia de M^m , a aplicação $g_* \cdot v$ é homotópica a uma constante, uma vez que os grupos de homotopia $\pi_i(V_k(\mathbb{R}^n))$ são nulos para $i < n-k$ e, como $n > m+k$, temos $n-k > m$.

Segue-se que $\Omega_F(g, g)$ é homotopicamente nula.

2.2.5. UM EXEMPLO: IMERSÕES DO TORO $S^1 \times S^1$.

Seja $\xi = S^1 \times \mathbb{R}^2$ o fibrado trivial de posto 2 sobre S^1 . Temos

$$\begin{array}{c} \downarrow \pi \\ S^1 \end{array}$$

$S(\xi) = S^1 \times S^1$ e seja $s: S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ uma secção.

Como o fibrado tangente ao longo das fibras $T_F(S^1 \times S^1)$ é trivial, consideremos um campo não nulo $v: S^1 \times S^1 \rightarrow T_F(S^1 \times S^1)$.

Sejam f e g duas imersões de $S^1 \times S^1$ em \mathbb{R}^3 coincidentes em $S_-(\xi) = (S^1 \times S^1)_-$, de modo que está definida a aplicação

$$\Omega_F(f, g): S^1 \times S^1 \rightarrow V_1(\mathbb{R}^3).$$

Como $V_1(\mathbb{R}^3)$ é homotopicamente equivalente a S^2 , normalizando os vetores envolvidos, podemos considerar $\Omega_F(f, g)$ como uma aplicação de $S^1 \times S^1$ em S^2 .

Por um teorema bem conhecido sobre o grau homológico, temos

$$\Omega_F(f, g) \simeq \text{constante se e somente se grau}(\Omega_F(f, g)) = 0.$$

$$\text{Por construção, grau}(\Omega_F(f, g)) = \text{grau}(f_* \cdot v) - \text{grau}(g_* \cdot v).$$

Vamos então calcular os graus envolvidos.

Escolhamos geradores α de $H_2(S^1 \times S^1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, β de $H^2(S^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ e μ de $H_2(S^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ tais que $\langle \beta, \mu \rangle = 1$ e $e(TS^2) = 2\beta$, onde e é a classe de Euler e \langle, \rangle é o índice de Kronecker.

Temos $(f_* \cdot v)_* \alpha = \text{grau}(f_* \cdot v) \mu$ e

$$\langle (f_* \cdot v)^* \beta, \alpha \rangle = \langle \beta, (f_* \cdot v)_* \alpha \rangle = \langle \beta, \text{grau}(f_* \cdot v) \mu \rangle = \text{grau}(f_* \cdot v).$$

Por outro lado, temos uma aplicação fibrada

$$\begin{array}{ccc} T_F(S^1 \times S^1) & \xrightarrow{f_*} & v^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^1 \times S^1 & \xrightarrow{f_* \cdot v} & S^2 \end{array}$$

onde v^1 é o fibrado normal do mergulho canônico $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

O fibrado complementar de v^1 é TS^2 , e temos

$(f_* \cdot v)^! TS^2 = v(f) \oplus \pi^! TS^1$, onde $v(f)$ é o fibrado normal da imersão $f: S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \text{Logo } (f_* \cdot v)^* (e(TS^2)) &= e((f_* \cdot v)^! TS^2) = e(v(f) \oplus \pi^! TS^1) \\ &= e(v(f)) \cdot \pi^* e(TS^1) = 0, \end{aligned}$$

e portanto $2(f_* \cdot v)^* \beta = 0$, donde $\text{grau}(f_* \cdot v) = 0$.

O mesmo acontece se trocarmos f por g , e $\Omega_F(f, g)$ é homotopicamente nula.

Mesmo considerando imersões do toro em \mathbb{R}^4 , temos Ω_F homotópica a uma constante. Este fato é geral para imersões de $S(\xi)$ em dimensão dobro.

2.2.6. NULIDADE DE $\Omega_F(f, g)$ PARA IMERSÕES DE $S(\xi)$ EM $\mathbb{R}^{2(m+k)}$.

Seja $S^k \subset S(\xi)$ um fibrado de esferas com uma secção, como em

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ M^m \end{array}$$

2.2.2, tal que o fibrado tangente ao longo das fibras trivialize sobre a imagem da secção.

Consideremos duas imersões f e g de $S(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^{2(m+k)}$ coincidentes em $S_-(\xi)$.

Uma vez que as obstruções a f e g serem regularmente homotópicas tomam valores em $\pi_i V_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)})$, podemos deformar g de modo a coincidir com f no complementar de um disco D^{m+k} mergulhado em $S_+(\xi)$, como na prova de 1.4.8.

Então $f_* \cdot v$ coincide com $g_* \cdot v$ fora de D^{m+k} , e a obstrução à existência de homotopia entre elas é

$$d(f_* \cdot v, g_* \cdot v) : S^{m+k} \rightarrow V_k(\mathbb{R}^{2(m+k)}).$$

Como $\pi_{m+k} V_k(\mathbb{R}^{2(m+k)}) = 0$, essa obstrução é nula e $f_* \cdot v$ é homotópica à $g_* \cdot v$, e consequentemente $\Omega_F(f, g)$ é homotopicamente nula.

2.2.7. OBSERVAÇÃO: Como, por exemplo, fixada uma imersão g do toro em \mathbb{R}^4 , podemos construir infinitas classes de homotopia regular de imersões coincidentes com g em $(S^1 \times S^1)_-$, concluímos que a construção Ω_F não detecta classes de homotopia regular, pelo menos neste caso.

Abandonando a hipótese de trivialização do fibrado tangente ao longo das fibras sobre uma secção, podemos ainda construir uma função

$\phi_F(f,g): S(\xi) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$, como descrito em 2.2.3.

Esta aplicação também não detecta classes de homotopia regular, pois, quando $T_F S(\xi) | s(M)$ trivialize, ϕ_F se fatora por

$$\begin{array}{ccc} S(\xi) & \xrightarrow{\phi_F(f,g)} & G_k(\mathbb{R}^n) \\ & \searrow \Omega_F(f,g) \quad \nearrow & \\ & V_k(\mathbb{R}^n) & \end{array} ,$$

mas seu estudo apresenta interesse por estar relacionada com o fibra do normal $s^!(T_F S(\xi))$ do mergulho $s: M \rightarrow S(\xi)$, fornecido pela secção.

2.2.8. RELACIONAMENTO ENTRE $\phi_F(g,g)$ E $s^!(T_F S(\xi))$.

Consideremos o fibrado de esferas $S^k \subset S(\xi)$ com uma secção e se

$$\downarrow \\ M^m$$

ja $g: S(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n > m+k$, uma imersão. Para facilitar a notação repre sentaremos por $s: M \rightarrow S(\xi)$ a secção polo norte.

Denotemos por $\bar{g}_F: S(\xi) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$ a aplicação tangente ao longo das fibras induzida por g , que a cada $z \in S(\xi)$ associa a imagem por g_* do plano tangente ao longo das fibras no ponto z .

Se $\phi_F(g,g)$ for homotopicamente nula,

$$\phi_F(g,g) \circ s = \bar{g}_F \circ s: M \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$$

também o será.

Como temos a aplicação fibrada

$$\begin{array}{ccc}
 s^!(T_F S(\xi)) & \xrightarrow{g_*} & \gamma_n^k \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M^m & \xrightarrow{\bar{g}_F^0 s} & G_k(\mathbb{R}^n)
 \end{array}$$

onde γ_n^k é o fibrado canônico sobre a grassmanniana, concluímos que $\phi_F(g, g) \approx \text{constante}$ implica em $s^!(T_F S(\xi))$ trivial.

Reciprocamente, se $s^!(T_F S(\xi))$ for trivial, seja $v: M \rightarrow s^!((T_F)_k(S(\xi)))$ um campo de k -referenciais.

Então $\bar{g}_F^0 s$ se fatora por

$$\begin{array}{ccc}
 M^m & \xrightarrow{\bar{g}_F^0 s} & G_k(\mathbb{R}^n) \\
 \searrow g_* \cdot v & & \nearrow p \\
 & V_k(\mathbb{R}^n) &
 \end{array}$$

e como $\pi_i V_k(\mathbb{R}^n) = 0$, para $i=1, \dots, m$, pois $n > m+k$, temos $\bar{g}_F^0 s$ homotópica a uma constante.

Denotando por $\pi: S_+(\xi) \rightarrow M$ a projeção fibrada, temos $s \circ \pi \approx \text{id}$ e portanto

$$\bar{g}_F \approx \bar{g}_F^0 s \circ \pi \approx \text{constante},$$

e como $\phi_F(g, g) = \bar{g}_F^0 \text{ret}$, temos $\phi_F(g, g)$ homotopicamente nula, onde ret é a aplicação definida em 2.2.4.

Mostramos assim que $\phi_F(g, g) \approx \text{constante}$ se e somente se $s^!(T_F S(\xi))$ for trivial.

2.2.11. DEPENDÊNCIA DE $\phi_F(g, g)$ EM RELAÇÃO À SECÇÃO

Seja $S^k \subset S(\xi)$ um fibrado com duas secções s_0 e s_1 e fixemos

$$\downarrow \pi$$

$$M^m$$

uma imersão $g: S(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Denotemos por $\phi_F^0(g, g)$ e $\phi_F^1(g, g)$ as aplicações construídas considerando-se s_0 e s_1 , respectivamente, como polo norte.

Se $\phi_F^0(g, g)$ for homotópica a $\phi_F^1(g, g)$, os fibrados induzidos $(i_0 \circ \text{ret}_0)^! T_F S(\xi)$ e $(i_1 \circ \text{ret}_1)^! T_F S(\xi)$ são isomorfos, onde os índices 0 e 1 indicam as aplicações correspondentes às secções s_0 e s_1 .

Como $i_0 \circ \text{ret} \simeq s_0 \circ \pi$, temos $(i_0 \circ \text{ret})^! T_F S(\xi) \simeq (s_0 \circ \pi)^! T_F S(\xi)$, e como $\pi \circ s = \text{identidade}$, temos $s_0^! (s_1 \circ \pi)^! T_F S(\xi) \simeq s_0^! (s_0 \circ \pi)^! T_F S(\xi)$, donde

$$s_1^! T_F S(\xi) = (s_1 \circ \pi \circ s_0)^! T_F S(\xi) \simeq (s_0 \circ \pi \circ s_0)^! T_F S(\xi) = s_0^! T_F S(\xi).$$

Concluimos que $\phi_F^0(g, g) \simeq \phi_F^1(g, g)$ implica em

$$s_1^! T_F S(\xi) \simeq s_0^! T_F S(\xi), \text{ ou seja, fibrados normais equivalentes.}$$

2.2.12. EXEMPLO: Consideremos o fibrado produto $S^2 \times S^2$.

$$\downarrow \pi$$

$$S^2$$

Sejam s_0 e s_1 duas secções. Podemos considerá-las como aplicações de S^2 em S^2 projetando-as na fibra por composição com a segunda projeção $p_2: S^2 \times S^2 \rightarrow S^2$.

A classe de cohomologia obstrução a $p_{20}s_1$ e $p_{20}s_0$ serem homotópicas é $d(p_{20}s_1, p_{20}s_0) \in H^2(S^2; \mathbb{Z})$, que tem por representante a cocadeia

2.2.9. OBSERVAÇÃO: Como ξ se decompõe como $\alpha \oplus 1$, onde 1 é o fibrado trivial sobre M gerado pela secção, temos $\alpha \cong s^!(T_F S(\xi))$, e então $\phi_F(g, g) \cong \text{constante}$ implica em ξ trivial.

2.2.10. EXEMPLO: Consideremos o fibrado tangente TS^2 sobre S^2 e seja $\xi = TS^2 \oplus 1$. Claramente ξ é trivial e $S^2 \subset S(\xi)$ possui uma secção s com $s^!(T_F S(\xi)) = TS^2$ e portanto não trivial. Logo $\phi_F(f, g)$ não é homotopicamente nula.

Também $\phi_F(f, g)$ não é homotopicamente nula, para qualquer imersão f coincidente com g em $S_-(\xi)$, uma vez que $\phi_F(f, g)$ classifica o fibrado $(i \circ \text{ret})^! T_F S(\xi)$, que é não trivial, onde $i: S_+(\xi) \rightarrow S(\xi)$ é a inclusão.

De fato, temos a aplicação fibrada

$$\begin{array}{ccc} (i \circ \text{ret})^! T_F S(\xi) & \xrightarrow{\Psi} & \gamma_n^k \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ S(\xi) & \xrightarrow{\phi_F(f, g)} & G_k(\mathbb{R}^n), \end{array}$$

onde

$$\Psi(X) = \begin{cases} f_* X, & \text{se } \pi X \in S_+(\xi), \\ (g_* \circ r)_* X, & \text{se } \pi X \in S_-(\xi), \end{cases}$$

e $s^!(i \circ \text{ret})^! T_F S(\xi) = (i \circ \text{ret} \circ s)^! T_F S(\xi) = s^! T_F S(\xi)$, que é não trivial. Podemos então concluir que $(i \circ \text{ret})^! T_F S(\xi)$ é não trivial e que $\phi_F(f, g)$ não é homotópica à constante.

$$\Delta(p_2 \circ s_1, p_2 \circ s_0) \in C^2(S^2; \pi_2 S^2).$$

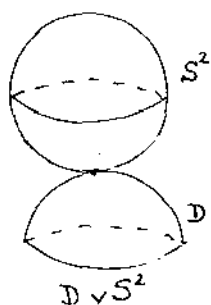
Podemos considerar $p_2 \circ s_0$ e $p_2 \circ s_1$ aplicações celulares, e, para cada 2-célula D de S^2 , supomos $p_2 \circ s_1$ e $p_2 \circ s_0$ coincidentes no bordo ∂D .

A cocadeia $\Delta(p_2 \circ s_1, p_2 \circ s_0)$ associa a D um elemento de $\pi_2 S^2$, e denotaremos por $\Delta(p_2 \circ s_1, p_2 \circ s_0).D: S^2 \rightarrow S^2$ um seu representante.

Seja $e(S^2)$ a classe de Euler de TS^2 e seja $x \in C^2(S^2; \mathbb{Z})$ uma cocadeia representante de $e(S^2)$.

Seja μ o gerador de $H_2(S^2; \mathbb{Z})$, identificado com o de $\pi_2 S^2$, tal que $\langle x, \mu \rangle = 2$.

Temos $(\Delta(p_2 \circ s_1, p_2 \circ s_0).D)_* \mu = \Delta \mu$, com $\Delta \in \mathbb{Z}$.



Seja $D \vee S^2$ a união com um ponto comum de D com S^2 .

Seja $f: D \rightarrow D \vee S^2$ uma aplicação que cobre D e S^2 com $f|_{\partial D} = \text{identidade}_{\partial D}$ e de grau 1.

O homomorfismo f_* induzido por f nas cadeias celulares leva D em $D + S^2$, onde S^2 denota um representante do gerador μ .

Seja $h: D \vee S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação tal que $h|_D = (p_2 \circ s_0)|_D$ e $h|_{S^2} = \Delta(p_2 \circ s_1, p_2 \circ s_0)$.

Temos $h \circ f = (p_2 \circ s_1)|_D \text{ rel } \partial D$.

Então os homomorfismos induzidos nas cocadeias celulares obedecem a:

$$\begin{aligned}
 (p_2 \circ s_1)^*(x) \cdot D &= (h \circ f)^*(x) \cdot D = (f^* \circ h^*)(x) \cdot D = \\
 &= h^*(x) (f_* D) = h^*(x) (D + S^2) = \\
 &= x \cdot ((p_2 \circ s_0)_* D) + x \cdot (\Delta(p_2 \circ s_1, p_2 \circ s_0)_* S^2) = \\
 &= (p_2 \circ s_0)^*(x) \cdot D + x \cdot (\Delta S^2) = \\
 &= (p_2 \circ s_0)^*(x) \cdot D + \Delta x \cdot S^2 = \\
 &= (p_2 \circ s_0)^*(x) \cdot D + 2\Delta = \\
 &= ((p_2 \circ s_0)^*(x) + 2\Delta(p_2 \circ s_1, p_2 \circ s_0)) \cdot D.
 \end{aligned}$$

Em termos de cohomologia, temos

$$(p_2 \circ s_1)^*(e(S^2)) - (p_2 \circ s_0)^*(e(S^2)) = 2d(p_2 \circ s_1, p_2 \circ s_0).$$

Se tivermos $\phi_F^1(g, g) \approx \phi_F^0(g, g)$, então

$$s_1^! T_F(S^2 \times S^2) \cong s_0^! T_F(S^2 \times S^2), \text{ como visto em 2.2.11.}$$

Como $T_F(S^2 \times S^2) = p_2^! TS^2$, temos $(p_2 \circ s_1)^! TS^2 \cong (p_2 \circ s_0)^! TS^2$, e portanto $(p_2 \circ s_1)^* e(S^2) = (p_2 \circ s_0)^* e(S^2)$ e a obstrução se anula:
 $d(p_2 \circ s_1, p_2 \circ s_0) = 0$.

Concluimos que $p_2 \circ s_1 \approx p_2 \circ s_0$ e $s_1 \approx s_0$. Como secções homotópicas são verticalmente homotópicas [J-T], podemos escolher a homotopia tal que em cada estágio seja uma secção.

A recíproca é clara.

Ainda considerando o exemplo do fibrado de esferas produto

$S^2 \times S^2$, associado a $S^2 \times \mathbb{R}^3$, seja $s: S^2 \rightarrow S^2 \times S^2$ a secção dada por

$$\begin{array}{ccc} \uparrow p_2 & & \\ S^2 & \xrightarrow{s} & S^2 \times S^2 \end{array}$$

$s(x) = (x, (0,0,1))$, $\forall x \in S^2$. Temos $s^* T_F(S^2 \times S^2)$ trivial.

Fixemos uma orientação em $S^2 \times S^2$ e sejam $f, g: S^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$ duas imersões tangentes em $(S^2 \times S^2)_-$ de modo que podemos considerar $\phi_F(f,g)$ tomando valores na grassmanniana orientada $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^6)$.

Seja $\bar{e} \in H^2(S^2 \times S^2; \mathbb{Z})$ a classe de Euler do fibrado $\tilde{\gamma}^\perp$ complement_o ortogonal do fibrado canónico $\tilde{\gamma}_6^2$.

Como $\tilde{f}_F^* \tilde{\gamma}^\perp = v(f) \oplus p_2^* TS^2$, e valendo a mesma equação para \tilde{g}_F , um cálculo simples mostra que

$$(\phi_F^*(f,g) - \phi_F^*(g,g)) \cdot \bar{e} = (e(v(f)) - e(v(g))) \cdot p_2^* e(S^2)$$

e como $\phi_F^*(g,g) = 0$, por 2.2.8, temos

$\phi_F^*(f,g) \cdot \bar{e} = (e(v(f)) - e(v(g))) \cdot p_2^* e(S^2)$, o que mostra o relaciona_{mento} de $\phi_F^*(f,g)$ com as classes normais.

Devido às dificuldades encontradas na generalização das conside_{rações} acima, resolvemos trocar o fibrado tangente ao longo das fi_{bras} pelo fibrado tangente global de $S(\xi)$ e estudamos o relacionamen_{to} entre a construção de Smale para fibrados de esferas e classes de homotopia regular de imersões.

§2.3. NOVA CONSTRUÇÃO DO INVARIANTE UTILIZANDO-SE O FIBRADO TANGENTE GLOBAL.

Seja ξ um fibrado de \mathbb{R}^{k+1} -planos sobre a variedade M^m compacta com uma secção não nula e com uma métrica riemanniana fixada de modo que o fibrado de esferas associado $S(\xi)$ admita uma secção $s: M^m \rightarrow S(\xi)$. Considerando os pontos determinados por esta secção em cada fibra como polo norte (e seu refletido equatorial como polo sul), podemos definir os fibrados de hemisférios $S_+(\xi)$ e $S_-(\xi)$ sobre M , como em 2.1.

2.3.1. DEFINIÇÃO: Dadas duas imersões f e g de $S(\xi)$ em \mathbb{R}^n , com $n > m+k$, coincidentes em $S_-(\xi)$, definimos a aplicação $\phi(f,g): S(\xi) \rightarrow G_{m+k}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\phi(f,g)(z) = f_*((TS(\xi))_z) = \bar{f}(z), \text{ se } z \in S_+(\xi) \text{ e}$$

$$\phi(f,g)(z) = g_*((TS(\xi))_{rz}) = \bar{g}(rz), \text{ se } z \in S_-(\xi),$$

onde rz é o refletido equatorial de z .

As aplicações tangentes \bar{f} e \bar{g} serão homotópicas (rel $S_-(\xi)$) se e somente se $\phi(f,g) = \phi(g,g)$ (rel $S_-(\xi)$).

Se $S(\xi)$ for orientado, podemos fazer $\phi(f,g)$ tomar valores na grassmanniana dos $(m+k)$ -planos orientados de \mathbb{R}^n , $\tilde{G}_{m+k}(\mathbb{R}^n)$.

Vamos apresentar propriedades de $\phi(f,g)$.

2.3.2. PROPOSIÇÃO: A aplicação $\phi(g,g): S(\xi) \rightarrow G_{m+k}(\mathbb{R}^n)$, com $n > 2m+k$, é homotópica a uma constante se e somente se o fibrado $s^!TS(\xi)$ induzido sobre M for trivial.

Demonstração: Seja $\bar{g}: S(\xi) \rightarrow G_{m+k}(\mathbb{R}^n)$ a aplicação tangente induzida por g .

Se $\phi(g,g)$ for homotópica à constante, a composta com a secção polo norte $\phi(g,g) \circ s = \bar{g} \circ s$ também o será.

Como em 2.2.8, $\bar{g} \circ s$ classifica o fibrado $s^!TS(\xi)$, que é portanto trivial.

Reciprocamente, suponhamos $s^!TS(\xi)$ trivial.

Denotemos por $\pi_0: S_+(\xi) \rightarrow M$ a projeção fibrada.

Temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & TS(\xi) & & \\ & & \downarrow & & \\ M & \xleftarrow[\pi_0]{s} & S_+(\xi) & \xrightarrow{i} & S(\xi) \end{array}$$

onde i é a inclusão e, como $s \circ \pi_0$ é homotópica a identidade de $S_+(\xi)$, temos

$$TS(\xi)|_{S_+(\xi)} \cong \pi_0^! s^! i^! TS(\xi),$$

o que mostra que $TS(\xi)|_{S_+(\xi)}$ é trivial.

Consideremos então um campo v de $(m+k)$ -referenciais tangentes sobre $S_+(\xi)$.

Seja $ret: S(\xi) \rightarrow S_+(\xi)$ a aplicação definida em 2.2.4.

Temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} S(\xi) & \xrightarrow{\phi(g,g)} & G_{m+k}(\mathbb{R}^n) \\ \text{ret} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow p \\ S_+(\xi) & \xrightarrow{g_* \cdot v} & V_{m+k}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

onde p é a projeção usual que associa a cada referencial o plano por ele gerado.

Como $\pi_i S_+(\xi) = \pi_i M$, e $\pi_i V_{m+k}(\mathbb{R}^n) = 0$ para $i < n - (m+k)$, a aplicação $g_* \cdot v: S_+(\xi) \rightarrow V_{m+k}(\mathbb{R}^n)$ é homotópica à constante, pois $m = 2m + k - (m+k) < n - (m+k)$.

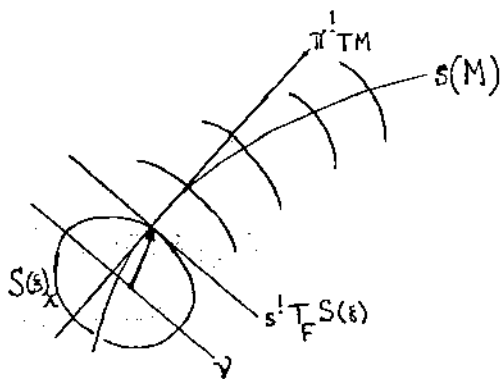
Portanto $\phi(g,g)$ é homotopicamente nula.

2.3.3: OBSERVAÇÃO SOBRE A CONDIÇÃO $s^!TS(\xi)$ TRIVIALIZAR

Como ξ^{k+1} sobre M admite uma secção, podemos decompô-lo na soma de Whitney $\xi^{k+1} = \nu^k \oplus 1$, e temos

$$s^!TS(\xi) \cong s^!(\pi^!TM \oplus T_F S(\xi)) \cong TM \oplus s^!T_F S(\xi) \cong TM \oplus \nu^k,$$

onde $\pi: S(\xi) \rightarrow M$ é a projeção fibrada.



Pelo teorema do fibrado normal 1.4.3, se $s^!TS(\xi)$ for trivial, a variedade M^m imerge em \mathbb{R}^{m+k} com fibrado normal ν^k .

Então, se $\phi(g,g) \approx$ constante, M^m imerge em \mathbb{R}^{m+k} .

Reciprocamente, se M^m imergir em \mathbb{R}^{m+k} com fibrado normal ν^k , temos $\xi = \nu^k \oplus 1$ com a propriedade de $s^!TS(\xi)$ ser trivial, e portanto $\phi(g, g)$ é homotopicamente nula, para qualquer imersão $g: S(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n > 2m+k$.

Vamos agora estudar imersões de $S(\xi)$ em $\mathbb{R}^{2(m+k)}$.

Sejam f e g duas imersões de $S(\xi)$ em $\mathbb{R}^{2(m+k)}$, tangentes na imagem de uma secção $s: M \rightarrow S(\xi)$.

2.3.4. TEOREMA: As imersões f e $g: S(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^{2(m+k)}$ são regularmente homotópicas (rel $s(M)$) se e somente se as aplicações tangentes \bar{f} e $\bar{g}: S(\xi) \rightarrow G_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)})$ forem homotópicas (rel $s(M)$).

Demonstração: Como $\pi_i V_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)}) = 0$ para $i < m+k$, podemos deformar f por meio de uma homotopia regular (rel $s(M)$), de modo a coincidir com g no complementar de um disco D^{m+k} mergulhado em $S_+(\xi)$, como na prova de 1.4.8.

Então a obstrução a f ser regularmente homotópica a g (rel $s(M)$) é o elemento $\Omega(f, g) \in \pi_{m+k} V_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)})$, representado por $w: S^{m+k} \rightarrow V_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)})$

$$x \rightarrow \begin{cases} f_*(x) \cdot v(x), & \text{se } x \in S_+^{m+k} \\ g_*(x) \cdot v(x), & \text{se } x \in S_-^{m+k}, \end{cases}$$

onde v é um campo de $(m+k)$ -referenciais tangentes em $T_{m+k} S(\xi) | D^{m+k}$.

A obstrução às aplicações tangentes \bar{f} e \bar{g} serem homotópicas

$(\text{rel } s(M))$ é a classe $[\bar{w}] \in \pi_{m+k} G_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)})$ da aplicação

$\bar{w}: S^{m+k} \rightarrow G_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)})$, definida como $\bar{w}(x) = \bar{f}(x)$, se $x \in S_+^{m+k}$ e $\bar{w}(x) = \bar{g}(x)$, se $x \in S_-^{m+k}$.

Temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} S^{m+k} & \xrightarrow{w} & V_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)}) \\ & \searrow \bar{w} & \nearrow p \\ & G_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)}) & \end{array}$$

p é projeção usual.

Como a fibração $0_{m+k} \subset V_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)}) \xrightarrow{p} G_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)})$ apresenta a inclusão $0_{m+k} \subset V_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)})$ homotopicamente nula (vide

$[W]$), a aplicação induzida pela projeção

$p_{\#}: \pi_i V_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)}) \rightarrow \pi_i G_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)})$ é injetora, para todo i .

Logo $[\bar{w}] = p_{\#} [w]$ é nula se e somente se $[w] = \Omega(f, g) = 0$ e temos $f \simeq_r g \text{ rel } s(M)$ se e somente se $\bar{f} \simeq \bar{g} \text{ rel } s(M)$.

Logo, se $f \simeq_r g \text{ rel } s(M)$

(Se o fibrado $\mathbb{R}^{k+1} \subset \xi^{k+1}$ apresentar duas secções linearmente independentes s e s' , vimos em 2.1 que o conjunto das classes de homotopia de aplicações de $S(\xi)$ em $G_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)})$ coincidentes com \bar{g} em $s(M)$ define um grupo denotado por $[S(\xi), G_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)}); \bar{g} \circ s]$.

A cada imersão $f: S(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^{2(m+k)}$ tangente a g em $s(M)$ podemos associar o elemento $[\bar{f}]$ no grupo.

2.3.5. Observemos que o elemento produto $[\bar{f}] \cdot [\bar{g}]^{-1}$ é a classe de homotopia (rel $s(M)$) da aplicação $\phi(f,g): S(\xi) \rightarrow G_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)})$, bem como o elemento neutro $1 = [\bar{g} \circ s \circ \pi]$ é a classe da aplicação $\phi(g,g)$.

Com essa linguagem, o teorema 2.3.4 pode ser reescrito como:

2.3.6. TEOREMA: Sejam f e g imersões de $S(\xi)$ em $\mathbb{R}^{2(m+k)}$ tangentes em $s(M)$. Então f é regularmente homotópica a g (rel $s(M)$) se e somente se $[\phi(f,g)] = [\bar{f}] \cdot [\bar{g}]^{-1} = 1$.

Considerando $S(\xi)$ compacto, orientado de dimensão $m+k$ par, imersões $f: S(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^{2(m+k)}$ induzem aplicações tangentes \bar{f} de $S(\xi)$ na grassmanniana $\tilde{G}_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)})$ dos $(m+k)$ -planos orientados.

Denotemos por \bar{e} a classe de Euler do fibrado $\tilde{\gamma}^\perp$ complementar ortogonal do fibrado classificante $\tilde{\gamma}^{m+k}$ sobre $\tilde{G}_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)})$.

2.3.7. PROPOSIÇÃO: A aplicação

$$\chi: [S(\xi), \tilde{G}_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)}); \bar{g} \circ s] \rightarrow H^{m+k}(S(\xi); \mathbb{Z}),$$

dada por $\chi([\alpha]) = \alpha^*(\bar{e})$, é um homomorfismo de grupos.

Demonstração: A tripla $(\partial S_+(\xi), S_+(\xi), S(\xi))$ fornece a sequência exata, com coeficientes inteiros,

$$\dots \rightarrow H_n(S_+(\xi), \partial S_+(\xi)) \xrightarrow{i_*} H_n(S(\xi), \partial S_+(\xi)) \xrightarrow{j_*} H_n(S(\xi), S_+(\xi)) \rightarrow \dots$$

$$\xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(S_+(\xi), \partial S_+(\xi)) \rightarrow \dots$$

A retração $\text{ret}: (S(\xi), \partial S_+(\xi)) \rightarrow (S_+(\xi), \partial S_+(\xi))$ fornece uma inversa à esquerda para a inclusão i , e temos $\text{ret}_* \circ i_* = \text{id}$, donde i_* é injetora.

Logo a sequência acima se reduz a

$$0 \rightarrow H_{m+k}(S_+(\xi), \partial S_+(\xi)) \xrightarrow{i_*} H_{m+k}(S(\xi), \partial S_+(\xi)) \xrightarrow{j_*} H_{m+k}(S(\xi), S_+(\xi)) \rightarrow 0.$$

Por excisão, $H_{m+k}(S(\xi), S_+(\xi)) \cong H_{m+k}(S_-(\xi), \partial S_+(\xi))$, e temos

$$H_{m+k}(S(\xi), \partial S_+(\xi)) \cong H_{m+k}(S_+(\xi), \partial S_+(\xi)) \oplus H_{m+k}(S_-(\xi), \partial S_+(\xi)).$$

Como $H_{m+k}(S_+(\xi), \partial S_+(\xi)) \cong H_{m+k}(S_-(\xi), \partial S_+(\xi)) \cong H_{m+k}(S(\xi))$, podemos escolher geradores μ_+ e μ_- para $H_{m+k}(S_+(\xi), \partial S_+(\xi))$ e $H_{m+k}(S_-(\xi), \partial S_+(\xi))$, respectivamente, e considerar $H_{m+k}(S(\xi))$ mergulhada na diagonal de $H_{m+k}(S(\xi), \partial S_+(\xi))$ com gerador $\mu = \mu_+ + \mu_-$.

Dados $[\alpha], [\beta] \in [S(\xi), \tilde{G}_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)}); \bar{g} \circ s]$, temos

$$[\alpha] \cdot [\beta]^{-1} = [\alpha^C] \cdot [\beta^C]^{-1} = [\phi(\alpha, \beta)], \text{ conforme 2.3.5, e}$$

$$\begin{aligned} \phi_*(\alpha, \beta)(\mu) &= \phi_*(\alpha, \beta)(\mu_+) + \phi_*(\alpha, \beta)(\mu_-) = \alpha_*^C(\mu_+) + \beta_*^C(\mu_-) = \\ &= \alpha_*^C(\mu_+) - \beta_*^C(\mu_-) = \\ &= \alpha_*^C(\mu_+) + \alpha_*^C(\mu_-) - \beta_*^C(\mu_-) - \beta_*^C(\mu_+) = \\ &= \alpha_*^C(\mu_+ + \mu_-) - \beta_*^C(\mu_+ + \mu_-) = \\ &= \alpha_*(\mu) - \beta_*(\mu), \end{aligned}$$

uma vez que $\alpha^C|_{S_-(\xi)} = \beta^C|_{S_-(\xi)}$.

$$\begin{aligned} \text{Com isto, } \langle \phi^*(\alpha, \beta)(\bar{e}), \mu \rangle &= \langle \bar{e}, \phi_*(\alpha, \beta)(\mu) \rangle = \\ &= \langle \bar{e}, \alpha_*(\mu) - \beta_*(\mu) \rangle = \\ &= \langle \alpha^*(\bar{e}), \mu \rangle - \langle \beta^*(\bar{e}), \mu \rangle = \\ &= \langle \alpha^*(\bar{e}) - \beta^*(\bar{e}), \mu \rangle, \end{aligned}$$

e portanto $\phi^*(\alpha, \beta)(\bar{e}) = \alpha^*(\bar{e}) - \beta^*(\bar{e}) = \chi([\alpha]) - \chi([\beta])$, o que mostra que χ é homomorfismo.

Pelo teorema 1.4.8, a cada classe par de $H^{m+k}(S(\xi))$ corresponde de uma classe de imersões $f: S(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^{2(m+k)}$ coincidentes com g em $S_-(\xi)$.

Concluimos com isto que os elementos do grupo $[S(\xi), \bar{G}_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)}); \bar{g} \circ s]$ que provêm de imersões constituem um subgrupo isomorfo ao grupo das classes pares de $H^{m+k}(S(\xi))$.

No caso de $m+k$ ímpar, como $\pi_{m+k} V_{m+k}(\mathbb{R}^{2(m+k)}) = \mathbb{Z}_2$, fixada uma imersão $g: S(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^{2(m+k)}$, o argumento utilizado na demonstração de 1.4.8 mostra que existem somente duas classes regulares de imersões coincidentes com g em $S_-(\xi)$.

Quando o elemento neutro $\mathbb{1} = [\phi(g, g)]$ for homotopicamente nulo, podemos trabalhar com a variedade de Stiefel no lugar da grassmanniana, o que é mais conveniente.

Vimos em 2.3.2 que isto ocorre quando o fibrado $s^!TS(\xi)$ so

bre M for trivial, e, por 2.3.3, esta situação é obtida quando a variedade M^m imergir em \mathbb{R}^{m+k} com um campo de vetores normais.

2.4. IMERSÕES DE $S(\xi)$ EM \mathbb{R}^n COM $TS(\xi)|_{s(M)}$ TRIVIAL

Seja ξ^{k+1} um fibrado vetorial de posto $k+1$ sobre a variedade M^m compacta com métrica riemanniana, que admita duas secções linearmente independentes, ou seja, possamos escrever $\xi^{k+1} = v^{k-1} \oplus 1 \oplus 1$.

Como em 2.1, o fibrado de esferas associado $S(\xi)$ tem duas secções ortogonais s e s' , e denominaremos s secção equatorial e s' secção polo sul.

Suponhamos que o fibrado tangente de $S(\xi)$ restrito a $s(M)$ seja trivial. Como em 2.3.3, temos a equação fibrada

$$s'^*TS(\xi) \cong TM \oplus v^{k-1} \oplus 1,$$

e portanto esta hipótese é equivalente a M imergir em \mathbb{R}^{n+k} com fibrado normal $v^{k-1} \oplus 1$.

Uma vez que o fibrado $S_+(\xi)$ dos hemisférios superiores se contrai a $s(M)$, o fibrado $TS(\xi)|_{S_+(\xi)}$ é trivial. Seja $v: S_+(\xi) \rightarrow T_{m+k}S(\xi)$ um campo de $(m+k)$ -referenciais tangentes sobre $S_+(\xi)$.

Fixemos uma imersão $g: S(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n > m+k$, e denotemos por $g: S_+(\xi) \rightarrow V_{m+k}(\mathbb{R}^n)$ a aplicação composta

$$\tilde{g}(z) \equiv g_*(z) \cdot v(z) = g_*(z, v(z)), \quad \forall z \in S_+(\xi).$$

Queremos associar uma estrutura de grupo ao conjunto das classes regulares de imersões de $S(\xi)$ em \mathbb{R}^n , tangentes a g em $s(M)$.

Por necessidades técnicas, vamos definir alguns espaços topológicos auxiliares.

2.4.1. DEFINIÇÕES

Seja Λ o espaço topológico de todas as aplicações equivariantes $q: T_{m+k}S(\xi) \rightarrow V_{m+k}(\mathbb{R}^n)$ coincidentes com g_* em $T_{m+k}S_+(\xi)/S_-(\xi)$, com a topologia compacto-aberta.

Seja Σ o espaço topológico de todas as aplicações contínuas $\beta: S(\xi) \rightarrow V_{m+k}(\mathbb{R}^n)$ coincidentes com $\tilde{g} \circ r$ em $S_-(\xi)$, com a topologia compacto-aberta, onde r é a reflexão equatorial.

2.4.2. LEMA: Λ é homeomorfo a Σ .

Demonstração: Seja $\theta: \Lambda \rightarrow \Sigma$ a aplicação dada por: para $q \in \Lambda$, definimos $\theta(q): S(\xi) \rightarrow V_{m+k}(\mathbb{R}^n)$ como

$$\theta(q)(z) = \begin{cases} q(z, v(z)) & \text{se } z \in S_+(\xi), \\ \tilde{g} \circ r(z) & \text{se } z \in S_-(\xi), \end{cases}$$

Mostremos que θ é sobrejetora.

Seja $\beta: S(\xi) \rightarrow V_{m+k}(\mathbb{R}^n)$, dada por $\beta(z) = (\beta_1(z), \dots, \beta_{m+k}(z))$, pertencente a Σ .

Podemos definir $q: T_{m+k}S(\xi) \rightarrow V_{m+k}(\mathbb{R}^n)$ por: para qualquer $(m+k)$ -referencial tangente $w = (w_1, \dots, w_{m+k}) \in (T_{m+k}S(\xi))_z$ na fibra sobre $z \in S(\xi)$, temos

$$q(z, w) = \begin{cases} (\beta_1(z), \dots, \beta_{m+k}(z)) \cdot A = \beta(z) \cdot A, & \text{se } z \in S_+(\xi), \\ g_*(z) \cdot w, & \text{se } z \in S_-(\xi), \end{cases}$$

onde $A \in GL(m+k)$ é a matriz determinada por

$$(w_1, \dots, w_{m+k}) = (v_1(z), \dots, v_{m+k}(z)) \cdot A = v(z) \cdot A.$$

A definição de q é consistente uma vez que, se $z \in S_-(\xi)$,

$$\beta(z) = \tilde{g}^*(z) = \tilde{g}(z) = g_*(z) \cdot v(z), \text{ e se } w = v(z) \cdot A \in (T_{m+k} S(\xi))_z, \text{ temos } \beta(z) \cdot A = (g_*(z) \cdot v(z)) \cdot A = g_*(z) \cdot (v(z) \cdot A) = g_*(z) \cdot w.$$

A equivariância de q decorre de: se $B \in GL(m+k)$, temos, para

$$\forall z \in S_+(\xi),$$

$$\begin{aligned} q(z, w \cdot B) &= q(z, (v(z) \cdot A) \cdot B) = q(z, v(z) \cdot (AB)) = \\ &= \beta(z) \cdot AB = q(z, w) \cdot B = B^{-1} \cdot q(z, w), \end{aligned}$$

pelas definições das ações envolvidas.

Claramente $\theta(q) = \beta$, pois, se $z \in S_+(\xi)$,

$$\theta(q)(z) = q(z, v(z)) = \beta(z),$$

uma vez que a matriz mudança de base é a identidade.

A injetividade de θ também é imediata, pois se q e q' em Λ são

tais que $\theta(q) = \theta(q')$, temos

$$q(z, v(z)) = q'(z, v(z)), \text{ para } \forall z \in S_+(\xi), \text{ e}$$

$$\begin{aligned} q(z, w) &= q(z, v(z) \cdot A) = A^{-1} \cdot q(z, v(z)) = A^{-1} \cdot q'(z, v(z)) = \\ &= q'(z, v(z) \cdot A) = q'(z, w), \quad \forall w \in (T_{m+k} S(\xi))_z, \end{aligned}$$

e portanto $q = q'$.

Podemos então definir $\theta^{-1}: \Sigma \rightarrow \Lambda$ por $\theta^{-1}(\beta) = q$ onde q é dado por

$$q(z, w) = \begin{cases} \beta(z) \cdot A, & \text{se } z \in S_+(\xi), \\ g_+(z) \cdot w, & \text{se } z \in S_-(\xi), \end{cases}$$

onde A é a matriz dada por $w = v(z) \cdot A$, para $w \in (T_{m+k} S(\xi))_z$.

A continuidade de θ e θ^{-1} decorre das definições das topologias.

Denotemos por Λ/\sim_e o conjunto das classes de homotopia equivariante, relativa a $T_{m+k} S(\xi) | S_-(\xi)$, de aplicações de Λ .

Seja Σ/\sim o conjunto das classes de homotopia, relativa a $S_-(\xi)$, de aplicações de Σ .

2.4.3. COROLÁRIO: O homeomorfismo θ induz bijeção entre os conjuntos quocientes Λ/\sim_e e Σ/\sim .

Este corolário decorre do fato dos caminhos em Λ e Σ serem homotopias equivariantes (rel $T_{m+k} S(\xi) | S_-(\xi)$) e homotopias (rel $S_-(\xi)$), respectivamente.

2.4.4. DEFINIÇÃO: Seja \mathcal{J} o espaço topológico das imersões de $S(\xi)$ em \mathbb{R}^n , tangentes a g em $S_-(\xi)$, com a topologia C^1 , e denotemos por \mathcal{J}/\sim_r o conjunto das classes de homotopia regular (rel $S_-(\xi)$) de imersões em \mathcal{J} .

2.4.5. TEOREMA: Existe uma correspondência bijetora entre as classes de homotopia regular (rel $S_-(\xi)$) de \mathcal{J}/\sim_r e as classes de homotopia equivariante (rel $T_{m+k}S(\xi)|S_-(\xi)$) de \wedge/\sim_e , desde que $n \geq m+k$.

Demonstração: Definimos $\alpha: \mathcal{J}/\sim_r \rightarrow \wedge/\sim_e$ por $\alpha[f] = [f_*]$, onde os colchetes indicam classes de equivalência.

Seja $q: T_{m+k}S(\xi) \rightarrow V_{m+k}(\mathbb{R}^n)$ em \wedge .

Podemos agora aplicar o teorema 1.3.28, com $K = S_-(\xi)$, $L = S(\xi)$ e $N = \mathbb{R}^n$. Obviamente $(g, g_*)|S_-(\xi)$ é $S(\xi)$ -imersão e q é extensão da restrição de g_* ao fibrado tangente sobre $S_-(\xi)$.

Então existe uma imersão $(f, f_*): S(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tangente à (g, g_*) em $S_-(\xi)$ e tal que $f_* \approx q$ rel $T_{m+k}S(\xi)|S_-(\xi)$.

Logo $\alpha([f]) = [f_*] = [q]$ e α é sobrejetora.

Sejam agora f e f' duas imersões em \mathcal{J} com $\alpha([f]) = \alpha([f'])$, ou seja, com $f_* \approx f'_*$ rel $T_{m+k}S(\xi)|S_-(\xi)$.

A conclusão de que $f \approx f'$ rel $S_-(\xi)$ decorre do teorema 1.3.29, fazendo-se $K = S_-(\xi)$, $L = S(\xi)$, $N = \mathbb{R}^n$, e observando que, como $(f, f_*)|S_-(\xi) = (f', f'_*)|S_-(\xi)$, essas restrições são trivialmente homotópicas, e (g, g_*) fornece a extensão admissível requerida em 1.3.29 (ii).

Então α é bijetora, como queríamos.

2.4.6. TEOREMA: Existe bijeção entre \mathcal{J}/\sim_r e Σ/\sim .

Demonstração: Decorre de 2.4.3 e 2.4.5.

Observemos que as duas secções ortonormais exigidas em nossas hipóteses ainda não foram utilizadas, bastando uma para definir os fi brados de hemisférios.

Podemos assim estudar as classes de J/\sim_r para imersões do to ro $S^1 \times S^1$ em \mathbb{R}^3 .

Como $\pi_1 V_2(\mathbb{R}^3) = \mathbb{Z}_2$ e $\pi_2 V_2(\mathbb{R}^3) = \pi_2 SO(3) = 0$, escolhendo uma decomposição celular conveniente, podemos mostrar que existem somente duas classes de homotopia regular para imersões de $S^1 \times S^1$ em \mathbb{R}^3 coincidentes em $(S^1 \times S^1)_-$ com uma imersão pré-fixada.

2.4.7. RELACIONAMENTO ENTRE Σ/\sim E O GRUPO $[S(\xi), V_{m+k}(\mathbb{R}^n); g \circ s]$.

Como uma homotopia rel $S_-(\xi)$ é em particular uma homotopia rel $s(M)$, podemos definir uma aplicação $i: \Sigma/\sim \rightarrow [S(\xi), V_{m+k}(\mathbb{R}^n); \tilde{g} \circ s]$ associando a cada classe $[\beta] \in \Sigma/\sim$ a classe com mesmo representante $[\beta] \in [S(\xi), V_{m+k}(\mathbb{R}^n), \tilde{g} \circ s]$.

Denotemos por η o representante do elemento neutro do grupo, da do por $\eta: S(\xi) \rightarrow V_{m+k}(\mathbb{R}^n)$ com

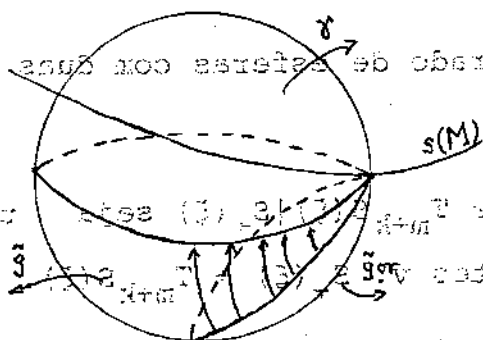
$$\eta(z) = \begin{cases} \tilde{g}(z) = g_*(z) \cdot v(z), & \text{se } z \in S_+(\xi), \\ \tilde{g}(rz) = g_*(rz) \cdot v(rz), & \text{se } z \in S_-(\xi), \end{cases} \quad (11)$$

onde r é a reflexão equatorial.

Seja $[\gamma]$ uma classe arbitrária em $[S(\xi), V_{m+k}(\mathbb{R}^n); \tilde{g} \circ s]$.

A aplicação $\gamma \vee \eta$, como construída em 2.1.4, representa a própria classe $[\gamma]$ e coincide, a menos de homotopia relativa a $s(M)$,

com η em $S_-(\xi)$.



Por meio de uma homotopia relativa a $s(M)$, podemos deformar $\gamma \vee \eta$ de modo a coincidir com $\tilde{g} \circ r$ em $S_-(\xi)$, simplesmente expandindo a região de coincidência com $\tilde{g} \circ r$ até torná-la $S_-(\xi)$.

Denotemos por $j(\gamma \vee \eta)$ uma aplicação assim construída.

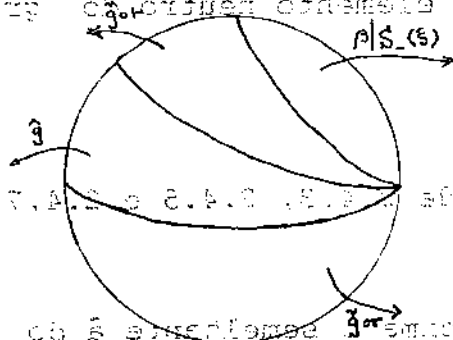
Observemos que se $\gamma = \gamma'$ rel $s(M)$, temos $j(\gamma \vee \eta) = j(\gamma' \vee \eta)$ rel $S_-(\xi)$.

Podemos então definir uma função

$$j: [S(\xi), V_{m+k}(\mathbb{R}^n); \tilde{g} \circ s] \rightarrow \Sigma/\sim$$

por $j([\gamma]) = [j(\gamma \vee \eta)]$.

Temos $i \circ j[\gamma] = [\gamma]$, $\forall \gamma \in [S(\xi), V_{m+k}(\mathbb{R}^n); \tilde{g} \circ s]$ e também $j \circ i[\beta] = [\beta]$, $\forall [\beta] \in \Sigma/\sim$, pois $\beta|_{S_-(\xi)} = \tilde{g} \circ r|_{S_-(\xi)}$ e portanto $j(\beta \vee \eta)$, formada pela justaposição $\beta|_{S_-(\xi)} \vee \tilde{g} \circ r \vee \tilde{g} \vee \tilde{g} \circ r$, é homotópica a β rel $S_-(\xi)$, uma vez que $\tilde{g} \circ r$ e \tilde{g} se anulam.



Então i e j são inversas, e temos uma bijeção entre Σ/\sim e o grupo $[S(\xi), V_{m+k}(\mathbb{R}^n); \tilde{g} \circ s]$.

Podemos então enunciar o seguinte

2.4.8. TEOREMA: Seja $S^k \subset S(\xi)$ um fibrado de esferas com duas seções ortogonais s e s' e suponhamos que $T_{m+k} S(\xi)|_{S_+(\xi)}$ seja trivial com campo de $(m+k)$ -referenciais tangentes $v: S_+(\xi) \rightarrow T_{m+k} S(\xi)$. Seja $g: S(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão, com $n > m+k$.

Então existe uma correspondência bijetora entre as classes de homotopia regular (rel $S_-(\xi)$) de imersões de $S(\xi)$ em \mathbb{R}^n e os elementos do grupo $[S(\xi), V_{m+k}(\mathbb{R}^n); g \circ s]$.

A correspondência é induzida por ϕ dada por: para cada imersão $f: S(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n$, definimos: $\phi(f): S(\xi) \rightarrow V_{m+k}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\phi(f)(z) = \begin{cases} f_*(z) \cdot v(z), & \text{se } z \in S_+(\xi), \\ g_*(rz) \cdot v(rz), & \text{se } z \in S_-(\xi), \end{cases}$$

onde r é a reflexão em relação ao hiperplano equatorial determinado por s' .

Além disso, se $[\phi(f)]$ for igual ao elemento neutro do grupo, f é regularmente homotópica a $g(\text{rel } S_-(\xi))$.

Demonstração: Decorre diretamente de 2.4.3, 2.4.5 e 2.4.7.

Observemos que a construção de ϕ acima é semelhante à do invariante de Smale.

BIBLIOGRAFIA

- [B] Becker, J.C., Cohomology and the classification of
liftings, Trans. A.M.S. 133(1968), 447-475. [SX]
- [C] Conde, A., Sobre as classes de Atiyah-Hirzebruch, de
Thom, o problema do mergulho e variedades flâmulas, Tese
de Livre-Docência, ICMSC-USP, 1979. [a-d]
- [C-S] Crabb, M.C. - Sutherland, W.A., A bundle over the
tangent sphere-bundle of a π - manifold, Quart. J. Math.
Oxford (2) 30(1979), 1-19. [C-S]
- [H-H] Haefliger, A. - Hirsch, M., Immersions in the stable
range, Ann. Math. 75 (1962), 231-241. [H]
- [H] Hirsch, M., Immersions of manifolds, Trans. A.M.S. 93
(1959), 242-276. [H]
- [Hm] Husemoller, D., Fibre Bundles, Mc Graw-Hill, New York,
1966. [Hm]
- [J-T] James, I. - Thomas, E., Note on the classification of
cross-sections, Topology 4 (1966), 351-359. [J-T]

- [K1] Kervaire, M.A., Sur le fibré normal à une variété plongée dans l'espace euclidien, Bull. Soc. Math. France 87 (1959) 397-401.
- [K2] Kervaire, M.A., Sur l'invariant de Smale d'un plongement, Comment. Math. Helv. 34 (1960) 127-139.
- [L-S] Lashof, R. - Smale, S., On the immersion of manifolds in Euclidean space, Ann. Math. 68 (1958), 562-583.
- [L-T] Larmore, L.L. - Thomas, E., Group extensions and principal fibration, Math. Scand. 30 (1972), 227-248.
- [S1] Smale, S., Regular curves on Riemannian manifolds, Trans. A.M.S. 87 (1958), 492-512.
- [S2] Smale, S., A classification of immersions of the two - sphere, Trans. A.M.S. 90 (1958), 281-290.
- [S3] Smale, S., The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces, Ann. Math. 69 (1959) 327-344.
- [St] Steenrod, N., The Topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951.

- [Sz] Szczarba, R.H., On tangent bundles of fibre spaces and
 quotient spaces, Amer.J. Math. 86 (1964), 685-697

- [W] Whitehead, G.W., Elements of homotopy theory, Springer -
 Verlag, New York, 1978.

- [Wh] Whitney, H., On regular closed curves in the plane,
 Compositio Math. 4 (1937) 276-284.